READER

INFORMATIE TER VOORBEREIDING OP DE DEFICIËNTIE TOETS WISKUNDE EN STATISTIEK

STUDIESUCCESCENTRUM WINDESHEIM

H1 Beschrijvende Statistiek

1.1 Inleiding en leerdoelen

Inleiding

Het bedrijfsleven besteedt veel aandacht aan marktonderzoek In een onderzoek passeren tal van aspecten de revue. Wat vinden consumenten van een product of dienst, wat moet er eventueel verbeterd worden, wat vinden consumenten van advertenties, wat vindt men van een gehanteerde prijs/kwaliteit verhouding? Bij al deze onderzoeken wordt er gebruik gemaakt van tabellen, grafieken en diverse getallen die de verzamelde gegevens samenvatten.

In het eerste hoofdstuk maak je kennis met de beschrijvende statistiek. Door middel van een aansprekende case komt de problematiek naar voren hoe je gegevens dient weer te geven. Na een indeling in zogenaamde meetniveaus kijken we naar de constructie van tabellen en grafieken. Vervolgens komen de berekening van modus, mediaan, gemiddelde en standaarddeviatie aan bod.

Leerdoelen

Kennis

- Je kent de vier meetniveaus nominaal, ordinaal, interval en ratio.
- Je kent de begrippen populatie en steekproef.
- Je weet aan welke eisen een tabel dient te voldoen.
- Je kent diverse grafieken.
- Je kent de meest voorkomende centrummaten en spreidingsmaten.

Vaardigheid

- Je kunt een tabel maken rekening houdende met de eisen die hieraan gesteld worden.
- Je kunt diverse grafieken maken.
- Je kunt de meest voorkomende centrummaten en spreidingsmaten berekenen.

1.2 Case Game 16

De IBL-student James Blackmoore loopt stage bij een groot ICT-bedrijf in Chicago, Verenigde Staten. Hier wordt koortsachtig gewerkt aan nieuwe computerspellen voor de nieuwe Playstation, die over een half jaar wereldwijd gelanceerd zal worden. Een aantal spellen zit nog in de testfase. In deze fase worden aan 20 testpersonen vragenlijsten voorgelegd. Hiermee worden alle onderdelen van een spel doorlopen op onder andere gebruikersvriendelijkheid, plezier en uitdaging.

Figuur 1.1

De vragenlijsten worden ingelezen in een bestand met de computer. Aan James wordt gevraagd om de gegevens van het spel Game 16 te analyseren. Op basis van de analyse dient hij voor de directie een presentatie te houden zodat helder wordt wat de eerste reacties uit de markt zijn. Eventuele gebreken kunnen nog aangepast worden.

Als James de gegevens ontvangt en opent op de computer, realiseert hij zich dat er verschillende soorten vragen met bijbehorende data zijn in de vragenlijst. Bijvoorbeeld:

1. Wat is je geslacht?	◘ *man*
	◘ *vrouw*
2. Wat vind je van de vormgeving van Game 16?	◘ *zeer goed*
	◘ *goed*
	◘ *noch goed, noch slecht*
	◘ *slecht*
	◘ *zeer slecht*

3. Hoeveel geld geef je per kwartaal uit aan games?   ………dollars

Geslacht	*Vormgeving Game 16*	*Uitgave games*
man	*zeer goed*	*30*
man	*zeer goed*	*80*
man	*goed*	*150*
man	*noch goed, noch slecht*	*135*
man	*goed*	*175*
man	*zeer goed*	*35*
man	*goed*	*75*
man	*noch goed, noch slecht*	*70*
man	*goed*	*80*
man	*goed*	*185*
vrouw	*goed*	*40*
vrouw	*goed*	*75*
vrouw	*goed*	*80*
vrouw	*goed*	*40*
vrouw	*slecht*	*120*
vrouw	*goed*	*75*
vrouw	*zeer goed*	*25*
vrouw	*goed*	*75*
vrouw	*noch goed, noch slecht*	*30*
vrouw	*goed*	*60*

Zal hij tabellen maken, of grafieken, of allebei? Moet hij iets berekenen en kengetallen laten zien? Hoe moet James de verkregen gegevens analyseren zodat de weergave van de analyse zo communicatief als mogelijk verloopt?

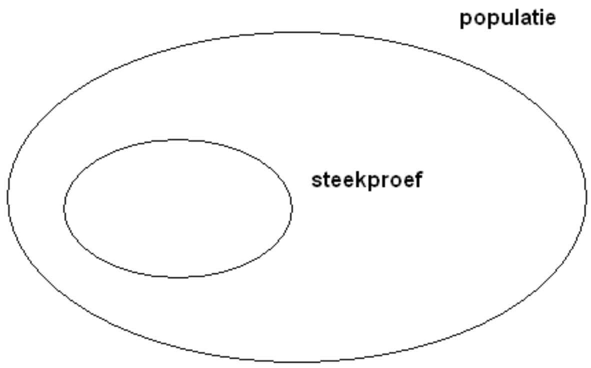
1.3 Populatie en Steekproef

De situatie in de case komt veel voor: er wordt onderzoek gedaan en de verzamelde gegevens dienen geanalyseerd te worden. Het liefste zouden we alle personen die het spel gaan kopen als testpersoon willen hebben. In dat geval onderzoeken we de **populatie**, in marketingtermen de totale doelgroep.
In de praktijk zijn dat veel te veel mensen om mee te laten doen met het onderzoek. We ondervragen meestal een gedeelte van de populatie. We spreken van het nemen van een

Steekproef.

De populatie bestaat uit alle objecten of personen waar het onderzoek op van toepassing is.

De steekproef is een gedeelte van de populatie.



Figuur 1.2

Het aantal elementen van een populatie wordt genoteerd met een **N**. In de case zijn er bijvoorbeeld 5 miljoen Amerikanen die het spel zullen gaan kopen. Dan is N = 5 miljoen.
Het aantal elementen in een steekproef wordt daarentegen genoteerd met **n**. In de case gaat het om een onderzoek onder 20 personen, dus n = 20.
We willen de gegevens van de steekproef uit de case generaliseren naar de populatie. Maar deze gegevens geven slechts een indicatief beeld. Als er meer gegevens worden verzameld, dan ontstaat er een nauwkeurigere indruk.

1.4 Meetniveau

Om de gegevens van de vragenlijst uit de case op de juiste wijze te kunnen analyseren, merken we op dat de antwoordmogelijkheden van de vragen weergegeven worden op een schaal.

Een schaal is een logische weergave van de antwoordmogelijkheden.

Er zijn diverse soorten schalen. Aan iedere schaal is een meetniveau toe te kennen.

Een meetniveau geeft het type schaal weer.

Er zijn vier meetniveaus:
- nominaal
- ordinaal
- interval
- ratio

We laten deze vier meetniveaus de revue passeren.

Nominaal

Bij een nominaal meetniveau is er sprake van verschillende antwoorden. Er zit geen systeem in deze antwoorden, er is geen logische volgorde. Voorbeeld van dit meetniveau is de vraag naar geslacht. De antwoorden man en vrouw zijn verschillend, maar de volgorde in de vragenlijst zijn willekeurig. Andere voorbeeld van een nominaal meetniveau is de vraag welke supermarkt u het meest bezocht heeft afgelopen jaar. Er zijn tal van antwoorden mogelijk:

Super de Boer
AH
Plus
Jumbo
Edah
Overig

Ordinaal

Bij een ordinaal meetniveau is er zowel sprake van verschillende antwoorden als van een logische volgorde. Voorbeeld van deze schaal is de vraag naar de mening over de vormgeving van Game 16 met de antwoorden:

zeer goed
goed
noch goed, noch slecht
slecht
zeer slecht

Je kunt zien dat er verschillende antwoorden zijn en dat er een logische volgorde is. Eventueel kun je beginnen met zeer slecht, maar je gaat deze antwoorden niet door elkaar gooien. Aan de volg**orde** ontleent dit meetniveau zijn naam. De relatie met de nominale schaal is:

Ordinaal = Nominaal + volgorde

Interval

Bij een interval meetniveau is er ook sprake van een logische volgorde. Daarnaast hebben de verschillen tussen de antwoorden een eenduidige betekenis. Een voorbeeld van een variabele met een interval meetniveau is de temperatuur in graden Fahrenheit. Als iemand zegt dat het 70 graden Fahrenheit 10 graden meer is dan 60 graden Fahrenheit, dan is dat een even groot verschil als tussen 70 en 80 graden Fahrenheit.

Opvallend aan de intervalschaal is het ontbreken van een natuurlijk nulpunt. Zo betekent nul graden Fahrenheit iets anders dan nul graden Celsius.

Kenmerkend voor dit meetniveau is dus dat het **interval** tussen twee antwoorden een eenduidige interpretatie kent, naast de logische volgorde:

Interval = Ordinaal + eenduidige betekenis interval

Ratio

Het ratio meetniveau heeft naast de kenmerken van het interval meetniveau een eenduidige betekenis voor de ratio = verhouding tussen twee getallen. Merk op dat de verhouding bij een interval meetniveau geen eenduidige betekenis heeft. Als we bijvoorbeeld kijken naar graden Celsius, dan is het niet zo dat als het 10 graden Celsius is dat het dan twee keer zo warm is als 5 graden Celsius. Dit is wel zo bij het ratio meetniveau. Iedereen begrijpt dat als iemand 100 dollar per kwartaal uitgeeft aan games, dat hij twee maal zo veel uitgeeft als iemand die 50 dollar per kwartaal uitgeeft aan games.

Bij een ratio meetniveau is er sprake van een natuurlijk nulpunt. Als je zegt dat je 0 euro hebt, dan begrijpt iedereen dit. Door dit natuurlijke nulpunt krijgt de verhouding tussen twee getallen de eenduidige betekenis.

Er geldt bij het ratio meetniveau:

Ratio = Interval + natuurlijk nulpunt

Opdracht 1

Bepaal van de drie vragen uit de case het meetniveau.

Verder zijn variabelen kwantitatief of kwalitatief. Bij een **kwantitatieve variabele** hebben we te maken met getallen, bijvoorbeeld de uitgave aan games per persoon per kwartaal. Bij een **kwalitatieve variabele** kijk je naar kenmerken die niet weergegeven worden door getallen, zoals geslacht en mening over Game 16.

1.5 Frequentieverdeling

Nu we weten welk meetniveau iedere vraag heeft, gaan we een tabel maken.

Bij een nominaal en ordinaal meetniveau maken we een tabel waar bij ieder antwoord het aantal en het percentage vermeld worden.

Bij een interval of ratio meetniveau maken we eerst klassen, daarna vermelden we bij iedere klasse het aantal en het percentage.

Een en ander betekent dat voor de vraag naar geslacht de volgende tabel gemaakt kan worden:

Geslacht	Aantal	Percentage
Man	10	50%
Vrouw	10	50%
Totaal	20	100%

Het is zeer gebruikelijk om naast de genoemde aantallen en percentages van de antwoorden ook het totaal er bij te zetten. Als je deskresearch uitvoert, vergeet dan niet om een bronvermelding onder de tabel te zetten. Verder moet bij het gebruik in een verslag of presentatie keurig een titel vermeld worden. Hier zou dat bijvoorbeeld kunnen zijn: Geslacht testpersonen Game 16. Dit resulteert in:

Geslacht testpersonen Game 16

Geslacht	**Aantal**	**Percentage**
Man	10	50%
Vrouw	10	50%
Totaal	20	100%

Bronvermelding: Onderzoeksverslag Game 16, Fenthworth Company 2007.

Omdat in deze tabel aantallen = frequenties gebruikt worden, is de naam van deze tabel een **frequentieverdeling**.

Bij de vraag naar de mening over de vormgeving kunnen we ook een frequentieverdeling maken:

Mening vormgeving Game 16	**Aantal**	**Percentage**
Zeer goed	4	20%
Goed	12	60%
Noch goed, noch slecht	3	15%
Slecht	1	5%
Zeer slecht	0	0%
Totaal	20	100%

Tot slot kijken we naar de vraag naar de besteding aan games per kwartaal. We maken een klassenindeling van

0 tot 50 dollar, van
50 tot 100 dollar, van
100 tot 200 dollar.

Opdracht 2

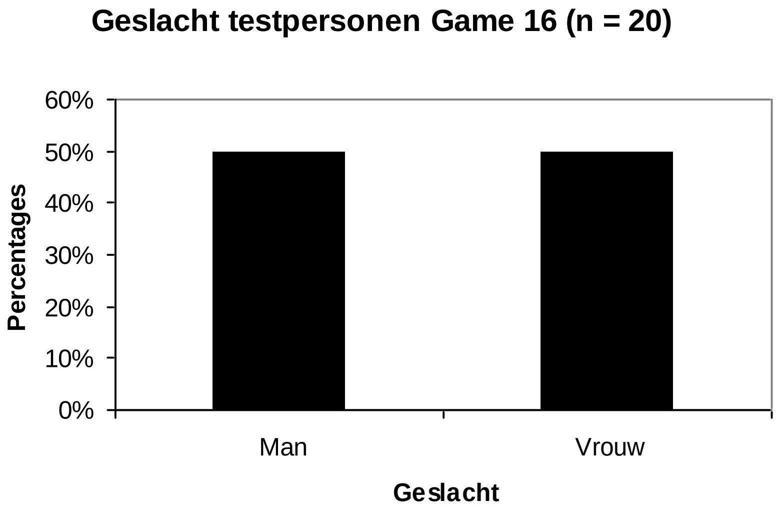
Maak de frequentieverdeling van de besteding aan games per kwartaal per persoon.

1.6 Grafieken

Naast de productie van een frequentieverdeling kan er in de case ook grafieken gemaakt worden. In het algemeen zijn er heel veel grafieken die met de pc heel snel gemaakt kunnen worden. We behandelen de meest voorkomende grafieken.

Het staafdiagram

Bij een nominaal meetniveau kunnen we een staafdiagram maken. Zo is in de case geslacht van het meetniveau nominaal. We gebruiken de frequentieverdeling van de vorige paragraaf om de grafiek te maken:



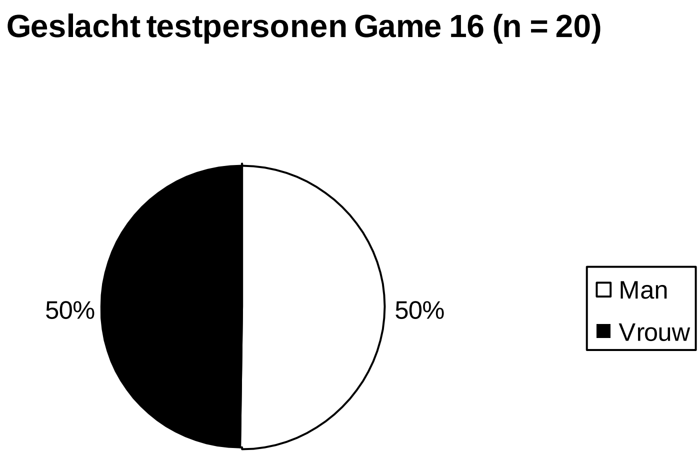
Figuur 1.3

We zien een eenvoudig figuur. Toch valt er nog wel iets te vertellen over het staafdiagram:

- in de titel vermelden we n = het aantal personen dat mee gedaan heeft aan het onderzoek.
- op de y-as zetten we niet de aantallen, maar de procenten.

Het cirkeldiagram

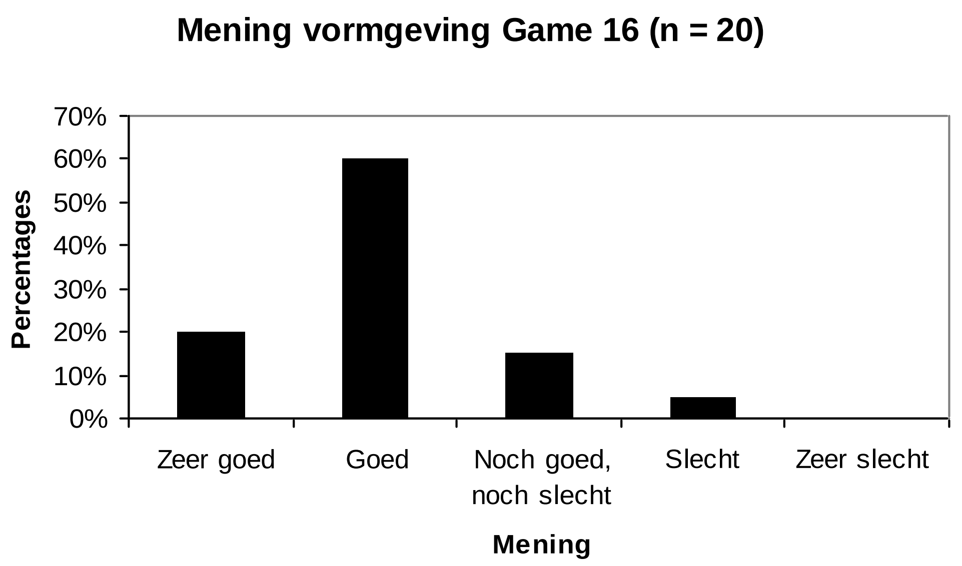
Bij een nominaal meetniveau kunnen we ook een cirkeldiagram maken. We gebruiken dezelfde gegevens als in de vorige paragraaf:



Figuur 1.4

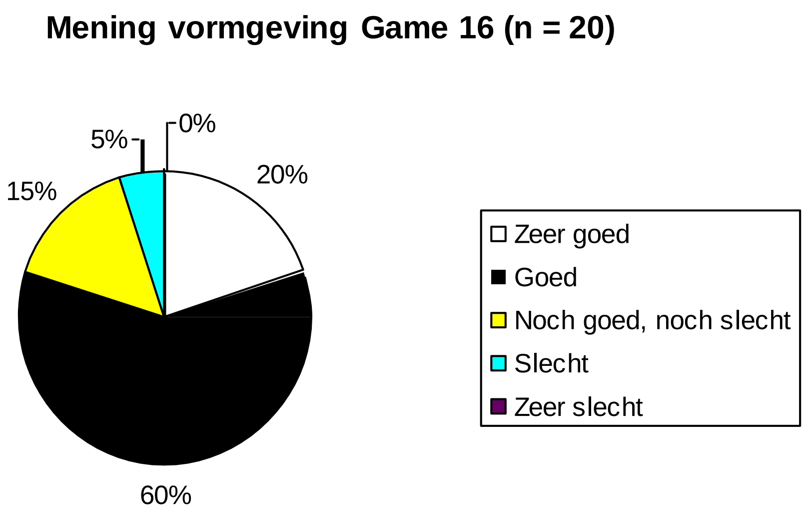
De vraag dringt zich op of we een cirkeldiagram of een staafdiagram gebruiken voor verslaglegging. Het antwoord hierop is dat je zelf mag kiezen, het hangt van je persoonlijke voorkeur af.

Het blijkt dat we bij een ordinaal meetniveau ook een staafdiagram en een cirkeldiagram kunnen maken. Zo wordt het staafdiagram van de vraag naar de mening over de vormgeving van Game 16:



Figuur 1.5

Het cirkeldiagram bij de vraag naar de mening over de vormgeving van Game 16 wordt bijvoorbeeld:



Figuur 1.6

Bij een nominaal en ordinaal meetniveau kunnen we een staafdiagram of een cirkeldiagram maken.

Het histogram

Bij een interval of ratio meetniveau maken we een histogram.

We kijken naar vraag 3 uit de case, deze ging over de besteding aan games per kwartaal.

Klasse (in dollars)	**Aantal**	**Percentage**
0 tot 50	6	30%
50 tot 100	9	45%
100 tot 200	5	25%

Opvallende klasse in de tabel is de laatste klasse. Deze is veel breder dan de andere twee klassen, die even breed zijn. Dit doet zich vaak voor bij een variabele op interval of ratio meetniveau. Vanaf een bepaald waarde wordt de frequentie van voorkomen van een getal minder en ook het interval van opeenvolgende getallen wordt groter. Deze getallen worden gevangen in een "restklasse".

Het gevolg is echter dat vergelijking van de klassen niet helemaal meer eerlijk is, immers de laatste klasse is breder dan de andere twee klassen. Dit probleem wordt opgelost met de zogenaamde **frequentiedichtheid.** Deze kan als volgt berekend worden:

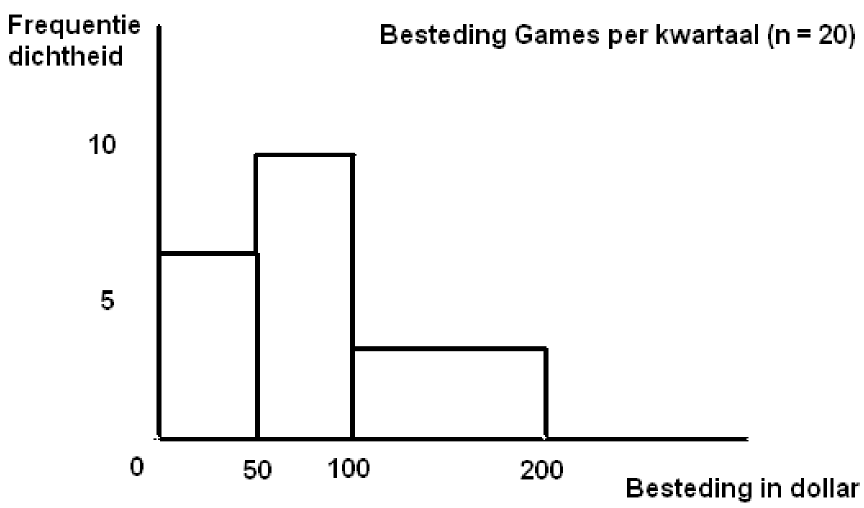
- ***kies een geschikte eenheid van klassenbreedte. Vaak is dit de kleinste klassenbreedte.***
- ***bepaal van alle klassenbreedtes de verhouding tot de eenheid van klassenbreedte.***
- ***deel alle frequenties door deze verhouding.***

Aan de hand van de vraag over de uitgave aan games per kwartaal bekijken we wat er gebeurt als we dit doen:

Klasse (in dollars)	**Klassenbreedte**	**Eenheid**	**Aantal**	**Frequentiedichtheid**
0 tot 50	50	1	6	6
50 tot 100	50	1	9	9
100 tot 200	100	2	5	2,5

- de geschikte eenheid van klassenbreedte is 50 dollar.
- de laatste klasse is 2 maal zo breed.
- de frequentiedichtheid in de eerste twee klassen is hetzelfde als de frequentie. In de laatste klasse interpreteren we de frequentiedichtheid als: per eenheid van 50 dollar vinden we 2,5 personen gemiddeld, dwz. van 100 tot 150 zijn dit 2,5 personen gemiddeld en van 150 tot 200 2,5 personen gemiddeld. Samen zijn dit 5 personen.

Het histogram wordt getekend door op de x-as de klassen in dollars te vermelden en op de y-as de frequentiedichtheid.



Figuur 1.7

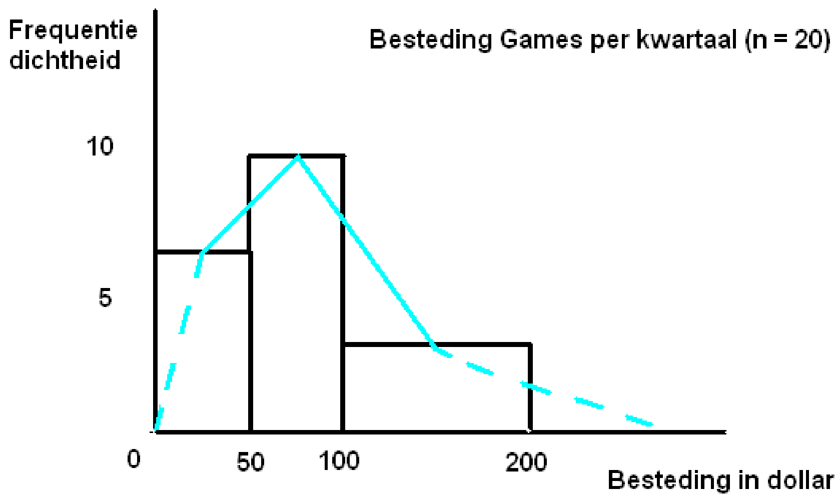
Uit de frequentieverdeling en uit het histogram halen we de **modale klasse:**

De modale klasse is de klasse met de grootste frequentiedichtheid

In het histogram en de frequentieverdeling kunnen we zien dat dit de klasse is van 50 tot 100 dollar.

Het frequentiepolygoon

Uit het histogram leiden we het **frequentiepolygoon** af. We selecteren de middens van ieder blok uit het histogram en deze verbinden we met elkaar. Aan het uiteinde nemen we een fictief klassenmidden. We stippelen aan de uiteinden naar een fictief klassenmidden. Zo ontstaat een optisch verzorgde grafiek.



Figuur 1.8

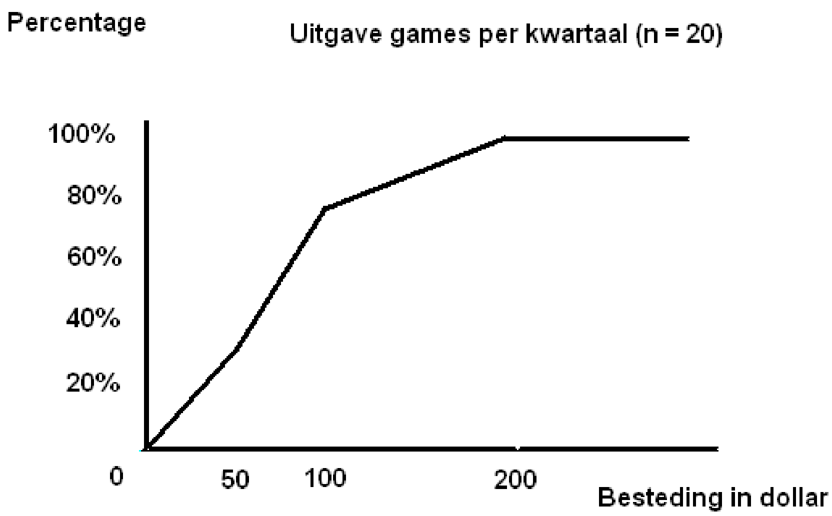
Het relatief cumulatief frequentiepolygoon

Standaard worden bij een aantal statistiek softwarepakketten de percentages in een frequentieverdeling gecumuleerd. Zo kun je in een oogopslag zien hoeveel procent van de consumenten tot bijvoorbeeld 100 dollar besteedt, namelijk 75%.

Klasse (in dollars)	**Aantal**	**Percentage**	**Gecumuleerde Percentages**
0 tot 50	6	30%	30%
50 tot 100	9	45%	75%
100 tot 200	5	25%	100%

Op basis van de laatste kolom kunnen we het **relatief cumulatief frequentiepolygoon** tekenen. Kenmerkend van dit figuur is dat:

- begonnen wordt bij de oorsprong 0,
- daarna verbind je 0 ter hoogte van het gecumuleerde percentage van de eerste klasse bij de **rechtergrens**,
- zo ga je door met verbinden van rechtergrens tot rechtergrens,
- als je bij 100% bent, trek je een horizontale lijn.



Figuur 1.9

1.7 Centrummaten

Nadat we tabellen en grafieken gemaakt hebben, dringt zich de vraag op of we kengetallen moeten berekenen. We behandelen in deze paragraaf een aantal centrummaten.

Centrummaten

Een centrummaat is een getal dat iets zegt over het centrum van verzamelde getallen.

Er zijn drie belangrijke centrummaten:

- modus
- mediaan
- gemiddelde

De modus

De modus is de waarde die het meeste voorkomt in een rij getallen.

Kijken we naar de getallen:

0 0 0 1 1 2

Dan komt de waarde 0 het meeste voor. Kijken we naar de volgende rij getallen:

0 0 0 1 1 1 2 2

Nu zijn er twee waarden die het meeste voorkomen, namelijk 0 en 1. We noemen deze rij getallen **bimodaal**, er zijn twee getallen die de modus zijn.

Kijken we naar de case en bepalen we de modus bij de genoemde drie vragen.

We zien dat mannen en vrouwen even vaak genoemd worden. Er zijn dus twee modi, namelijk man en vrouw. Geslacht is dus bimodaal.

Geslacht	Aantal	Percentage
Man	10	50%
Vrouw	10	50%
Totaal	20	100%

Dan kijken we naar de mening over de vormgeving van Game 16:

Mening vormgeving Game 16	Aantal	Percentage
Zeer goed	4	20%
Goed	12	60%
Noch goed, noch slecht	3	15%
Slecht	1	5%
Zeer slecht	0	0%
Totaal	20	100%

De modus is gelijk aan het antwoord goed. De meeste mensen vinden de vormgeving van Game 16 goed.

Tot slot kijken we naar de besteding aan games per kwartaal per persoon.

Besteding games
30
80
150
135
175
35
75
70
80
185
40
75
80
40
120
75
25
75
30
60

Opdracht 3

Bepaal de modus bij de bestedingen aan games per kwartaal per persoon.

De mediaan

De mediaan is de middelste waarde na rangschikking van klein naar groot.

Beschouwen we de volgende getallen:

60 50 70

Wat is de mediaan van deze getallen? Eerst dienen we de getallen van klein naar groot te rangschikken:

50 **60** 70

De middelste waarde 60 is nu de mediaan. Kijken we naar:

60 50 70 80

We vragen ons wederom af wat de mediaan is. We rangschikken van klein naar groot:

50 **60** **70** 80

Er zitten twee waarden in het midden, namelijk 60 en 70. We spreken af dat de mediaan het gemiddelde is van 60 en 70. De mediaan is dus 65.

Het laatste fenomeen doet zich altijd voor bij een even aantal getallen. Je zoekt na rangschikking de twee middelste waarden op en neemt hierover het gemiddelde. Dan heb je de mediaan gevonden!

In de case van Game 16 is de mediaan niet te bepalen bij geslacht vanwege het nominale meetniveau, maar wel bij de vragen over de besteding aan games per kwartaal en de mening over de vormgeving van Game 16.

Mening vormgeving Game 16	**Aantal**	**Percentage**
Zeer goed	4	20%
Goed	12	60%
Noch goed, noch slecht	3	15%
Slecht	1	5%
Zeer slecht	0	0%
Totaal	20	100%

De antwoorden in de tabel zijn al gerangschikt. We zoeken in volgorde waarneming 10 en 11. Bij beide waarnemingen is het antwoord goed. De mediaan is dus het antwoord goed.

Dan kijken we naar de bepaling van de mediaan bij de vraag naar besteding aan games per kwartaal. Allereerst rangschikken we alle bedragen van klein naar groot:

Besteding games gerangschikt
25
30
30
35
40
40
60
70
75
75
75
75
80
80
80
120
135
150
175
185

Opdracht 4

Wat is de mediaan van de bestedingen aan games per kwartaal per persoon?

Het gemiddelde

We onderscheiden twee soorten gemiddelden:

- het steekproefgemiddelde
- het populatiegemiddelde

Het steekproefgemiddelde

Het steekproefgemiddelde wordt berekend door alle getallen op te tellen en te delen door n = het aantal elementen in de steekproef.

Het steekproefgemiddelde van de getallen

50 60 70

is gelijk aan (50 + 60 + 70)/3 = 60.

De formule voor het steekproefgemiddelde is:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

We lichten de formule toe:

- $\bar{x}$ de notatie voor het steekproefgemiddelde.
- n is het aantal elementen van de steekproef.
- het symbool Σ spreek je uit als “de som van”. Dit symbool is het sommatieteken uit de wiskunde.
- de getallen worden aangeduid met x_i, bijvoorbeeld x_1 = 50 .

Het populatiegemiddelde

Het populatiegemiddelde wordt berekend door alle getallen op te tellen en te delen door N = het aantal elementen in de populatie.

De formule voor het populatiegemiddelde is:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

In deze formule is:

- μ de notatie voor het populatiegemiddelde.
- N het aantal elementen in de populatie.

Reken technisch worden steekproefgemiddelde en populatiegemiddelde op dezelfde wijze uitgerekend als je een aantal getallen hebt.

Het verschil tussen het populatiegemiddelde en het steekproefgemiddelde is dat het populatiegemiddelde het gemiddelde is dat je graag zou willen weten. Omdat meestal het te veel tijd en geld kost om iedereen te ondervragen, volsta je in je onderzoek met het steekproefgemiddelde. Je schat het populatiegemiddelde met het steekproefgemiddelde.

Opdracht 5

Bepaal het steekproefgemiddelde van de bestedingen aan games per kwartaal per persoon.

Gemiddelde bij een frequentieverdeling

Als je deskresearch uitvoert, dan kan het je overkomen dat je wel een frequentieverdeling vindt, maar niet het bijbehorende gemiddelde. Zo zou de frequentieverdeling van uitgave aan games per persoon per kwartaal bij een ander onderzoek gebruikt kunnen worden als secundaire informatie, maar zonder het steekproefgemiddelde er bij:

Klasse (in dollars)	**Aantal**	**Percentage**
0 tot 50	6	30%
50 tot 100	9	45%
100 tot 200	5	25%
Totaal	20	100%

Hoe groot is nu het steekproefgemiddelde op basis van deze tabel? In deze frequentieverdeling zijn alle verzamelde getallen gecomprimeerd in de gegeven klassen. Het is niet meer mogelijk om het exacte gemiddelde uit te rekenen als we alleen maar deze tabel hebben. Wel kunnen we een goede **benadering** vinden van het gemiddelde met behulp van de klassenmidden:

- bepaal van iedere klasse het klassenmidden.
- vermenigvuldig het klassenmidden met het aantal van deze klasse.
- tel de uitkomsten hiervan op: we hebben een benadering van de som van de uitkomsten!
- deel door het aantal waarnemingen.

We illustreren dit aan de hand van het voorbeeld:

Klasse (in euro)	**Aantal** f_i	**Midden** m_i	**Aantal * midden** $f_i * m_i$
0 tot 50	6	25	6 * 25 = 150
50 tot 100	9	75	675
100 tot 200	5	150	750
Totaal	20		1.575

- de klassenmidden zijn 25, 75 en 150. Ga dit na!
- deze vermenigvuldigen we met de aantallen, bijvoorbeeld 6 * 25 = 150 is het totaal van de eerste klasse.

- we tellen de uitkomsten hiervan op en vinden een totaal van alle waarnemingen van 1.575 euro. Er zijn 20 mensen die samen bij benadering 1.575 euro aan games uitgeven per kwartaal.
- het gemiddelde is 1.575/20 = 78,75 euro per persoon per kwartaal aan uitgave aan schoenen. Vergelijk dit met het steekproefgemiddelde op basis van losse gegevens in de vorige paragraaf van 81,75 dollar. Je ziet dat er een verschil is: het correcte steekproefgemiddelde is 81,75 dollar, de benadering is de 78,75 dollar op basis van de frequentieverdeling.

Het gemiddelde dat we uitgerekend hebben, noemen we het **gewogen gemiddelde**. We wegen immers ieder midden met de bijbehorende frequentie.

De formule voor het gewogen steekproefgemiddelde is:

$$\bar{x} = \frac{\sum f \,.m_i}{n}$$

In de tabel van het voorbeeld zie je de benodigde notatie staan:

- f_i is de frequentie van klasse i, bijvoorbeeld f_1 = 6.
- m_i is het midden van klasse i, bijvoorbeeld m_1 = 25.

De formule voor het gewogen populatiegemiddelde is:

$$\mu = \frac{\sum f_i . m_i}{N}$$

Het verschil met de vorige formule is dat we nu delen door N = het aantal elementen in de populatie. Voor de berekening maakt het niets uit of we te maken hebben met een steekproefgemiddelde of populatiegemiddelde.

1.8 Spreidingsmaten

In deze paragraaf kijken we naar een aantal spreidingsmaten.

Een spreidingsmaat is een getal dat iets zegt over de spreiding van een aantal getallen

Om het begrip spreiding duidelijk te maken geven we de volgende twee rijen getallen:

Rij 1:	50	60	70
Rij 2:	0	60	120

Als je naar de twee rijen kijkt, dan blijkt dat het gemiddelde van beiden 60 is. Toch zijn beide rijen niet gelijk. De afstand van de getallen van de tweede rij is groter dan de afstand van de getallen onderling van de eerste rij. Klaarblijkelijk is het gemiddelde niet voldoende om de rij getallen samen te vatten. We gebruiken een spreidingsmaat om een rij getallen verder te karakteriseren.

We onderscheiden twee spreidingsmaten:

- de spreidingsbreedte
- de standaarddeviatie

De spreidingsbreedte

De spreidingsbreedte ofwel range van een rij getallen is de hoogste waarde minus de laagste waarde.

Kijken we naar de getallen:

50 60 70

Dan is de spreidingbreedte 70 – 50 = 20.

De spreidingbreedte wordt gebruikt om snel een eerste indruk te krijgen van de spreiding van een rij getallen. Helaas is de spreidingbreedte niet optimaal omdat niet alle gegevens gebruikt worden.

Opdracht 6

Bepaal de spreidingbreedte bij de bestedingen aan games per kwartaal per persoon.

De steekproefstandaarddeviatie

De steekproefstandaarddeviatie wordt als volgt berekend:

- bereken het steekproefgemiddelde.
- bepaal het verschil tussen alle getallen en het steekproefgemiddelde.
- kwadrateer deze verschillen.
- tel al deze kwadraten op.
- deel door het aantal elementen minus 1.
- neem tot slot de wortel.

Dit alles is een beste mond vol. We gaan dit illustreren met de volgende getallen die we beschouwen als onze steekproef:

50 60 70

Deze getallen plaatsen we in een tabel om een en ander overzichtelijk weer te geven:

Getal	**Verschil**	**Kwadraat**
50	50 – 60 = -10	100
60	60 – 60 = 0	0
70	70 – 60 = 10	100
Totaal	0	200

- bereken het steekproefgemiddelde. Het gemiddelde van 50, 60 en 70 is (50 + 60 + 70)/3 = 60.

- het verschil met 50, 60 en 70 is

50 – 60 = -10
60 – 60 = 0
70 – 60 = 10.

- het kwadraat van deze verschillen is $(-10)^2 = 100$, $0^2 = 0$, $10^2 = 100$.

- de som van de kwadraten is 100 + 0 + 100 = 200.

- delen door het aantal elementen in deze steekproef minus 1 is delen door 2, dus 200/2 = 100.

- tot slot nemen we de wortel, dus √100 = 10.

De formule van de steekproefstandaarddeviatie is:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Berekening van deze spreidingsmaat geschiedt in de praktijk door het grafische rekenmachine of een softwareprogramma als Excel. De berekening gaat dan, ook bij veel gegevens, vliegensvlug.

De populatiestandaarddeviatie

De formule voor de populatiestandaarddeviatie luidt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Belangrijkste verschillen met de formule van de steekproefstandaarddeviatie zijn:

- we gebruiken in de formule het populatiegemiddelde.
- we delen niet door het n – 1 = het aantal steekproefgetallen minus 1, maar door het N = aantal populatiegetallen

Als de getallen 50, 60 en 70 afkomstig zouden zijn van een populatie, dan is de berekening praktisch hetzelfde als bij de steekproefstandaarddeviatie. Het verschil is dan dat we 200 delen door 3 in plaats van door 2. We vinden σ = √(200/3) = √66,67 = 8,17.

In de case berekent James de steekproefstandaarddeviatie op basis van de 20 verzamelde gegevens met de pc. Hij vindt s = 47,77 dollar.

De volgende vuistregels zijn met regelmaat van toepassing bij grote aantallen gegevens:

- ***68% van de gegevens zit in tussen het gemiddelde en plus of min de standaarddeviatie.***
- ***95% van de gegevens zit in tussen het gemiddelde en plus of min twee maal de standaarddeviatie.***

Opdracht 7

In de case hebben we slechts 20 gegevens voor uitgave aan games per kwartaal. Controleer desalniettemin of de vuistregels hier ongeveer van toepassing zijn of helemaal niet.

Standaarddeviatie bij een frequentieverdeling

Zowel de populatiestandaarddeviatie als de steekproefstandaarddeviatie zijn te bepalen op basis van alleen een frequentieverdeling.

De formule voor de populatiestandaarddeviatie luidt in dit geval:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \mu)^2}{N}}$$

Voor de steekproefstandaarddeviatie is de formule:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

We zien wederom het kenmerkende verschil dat bij de populatiestandaarddeviatie gedeeld wordt door het aantal getallen N en bij de steekproefstandaarddeviatie gedeeld wordt door het aantal getallen n minus 1.

We nemen voor de berekening van de steekproefstandaarddeviatie de frequentieverdeling van de besteding aan games per persoon per kwartaal. Hier was het steekproefgemiddelde op basis van de tabel 78,75 dollar, zoals eerder uitgerekend.

Klasse (in euro)	f_i	m_i	$m_i - \bar{x}$	$(m_i - \bar{x})^2$	$f_i(m_i - \bar{x})^2$
0 tot 50	6	25	25 – 78,75 = -53,75	2.889,0625	6 * 2.889,0625 = 17.334,3750
50 tot 100	9	75	-3,75	14,0625	126,5625
100 tot 50	5	150	71,25	5.076,5625	25.382,8125
Totaal	20				**42.843,7500**

- we halen van ieder klassenmidden het gemiddelde 78,75 dollar af.
- dan bepalen we het kwadraat van deze verschillen.
- de kwadraten vermenigvuldigen we met de frequentie van iedere klasse en vervolgens tellen we op.

- we vinden dan in totaliteit 42.843,7500.
- dan delen we door 20 – 1 = 19 en nemen de wortel.
- het resultaat is s = √(42.843,7500 /19) = 47,49 dollar.

Vergelijk dit met de steekproefstandaarddeviatie die James gevonden heeft in de vorige paragraaf op basis van de losse gegevens van s = 47,77 dollar. Wederom zie je dat s = 47,77 dollar op basis van de losse gegevens de correcte steekproefstandaarddeviatie is en dat s = 47,49 dollar een benadering hiervan is.

De berekening van de populatiestandaarddeviatie volgt op soortgelijke wijze. In de formule van de populatiestandaarddeviatie wordt het populatiegemiddelde gebruikt en wordt, zoals gezien, gedeeld door N.

1.9 Trefwoorden

Meetniveau	Frequentiepolygoon
Nominaal	Cumulatief relatief frequentiepolygoon
Ordinaal	Centrummaten
Interval	Spreidingsmaten
Ratio	Modus
Kwantitatief	Mediaan
Kwalitatief	Gemiddelde
Populatie	Spreidingsbreedte
Steekproef	Standaarddeviatie
Frequentieverdeling	Gewogen gemiddelde
Staafdiagram	Populatiegemiddelde
Cirkeldiagram	Steekproefgemiddelde
Histogram	Populatiestandaarddeviatie
Frequentiedichtheid	Steekproefstandaarddeviatie
Modale klasse	

1.10 Samenvatting

We hebben gezien dat er vier meetniveaus zijn: nominaal, ordinaal, interval en ratio. Bij nominaal en ordinaal kunnen we direct een frequentieverdeling maken, bij interval en ratio maken we eerst klassen, daarna een frequentieverdeling. Bij een nominaal en ordinaal meetniveau zijn basisgrafieken die veel gebruikt worden het staafdiagram en het cirkeldiagram. Bij het interval en ratio meetniveau worden het histogram, frequentiepolygoon en het cumulatief relatief frequentiepolygoon veel gebruikt. Verder hebben we gezien dat de belangrijkste centrummaten modus, mediaan en gemiddelde zijn; de belangrijkste spreidingsmaten zijn de spreidingsbreedte en de standaarddeviatie. Ook is aandacht besteed aan de opsplitsing in populatie en steekproef voor de berekening van gemiddelde en standaarddeviatie. Tot slot is gekeken hoe we gemiddelde en standaarddeviatie op basis van een frequentieverdeling kunnen benaderen.

<u>Formules op basis van losse gegevens</u>:

populatiegemiddelde $\mu = \frac{\sum x_i}{N}$

steekproefgemiddelde $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

populatiestandaarddeviatie $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$

steekproefstandaarddeviatie $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

<u>Formules op basis van een frequentietabel</u>:

populatiegemiddelde $\mu = \frac{\sum f_i . m_i}{N}$

steekproefgemiddelde $\bar{x} = \frac{\sum f_i . m_i}{n}$

populatiestandaarddeviatie $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \mu)^2}{N}}$

steekproefstandaarddeviatie $s = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

1.11 Kennisopgaven

Opgave 1

a. Wat is het verschil tussen een nominaal meetniveau en een ordinaal meetniveau?
b. Wat is het onderscheid tussen een ordinaal meetniveau en een interval meetniveau?
c. Wat is het verschil tussen een interval meetniveau en een ratio meetniveau?

Opgave 2

Wat is het verschil tussen een steekproef en een populatie?

Opgave 3

Welke informatie dient er in een frequentieverdeling te staan?

Opgave 4

a. Geef twee typen grafieken die men kan maken op nominaal en ordinaal meetniveau.
b. Geef drie typen grafieken die gemaakt kunnen worden op interval en ratio meetniveau.

Opgave 5

a. Welke drie centrummaten kun je noemen?
b. Noem twee spreidingsmaten.

Opgave 6

a. Wat is het verschil tussen een steekproefgemiddelde en een populatiegemiddelde?
b. Wat is reken technisch het verschil tussen de steekproefstandaarddeviatie en de populatiestandaarddeviatie?

1.12 Toegepaste opgaven

Opgave 1

Geef van de volgende variabelen aan welk meetniveau ze hebben:

- Winst in euro's per maand.
- Paspoortnummer.
- Mening nieuwe CD Marco Borsato met als antwoordmogelijkheden

zeer goed
goed
noch goed, noch slecht
slecht
zeer slecht

- IQ.
- Ben je in bezit van een I-POD? Met als antwoordmogelijkheden ja/nee.
- Uitgave aan bioscoop per kwartaal in euro's.

Opgave 2

Geen zaken meer na slechte ervaring

"Van alle Nederlanders die weggaan als klant bij een bedrijf vanwege een slechte klantervaring, wil 30% nooit meer zaken doen met die organisatie. Dit komt naar voren uit een onderzoek door marktonderzoeksbureau Team Vier in opdracht van Right Now Technologies onder 962 Nederlanders van 18 jaar en ouder.

*Terwijl veel bedrijven nieuwe klanten werven met marketing- en salesactiviteiten, verliezen ze ook veel klanten door slechte klantloyaliteitsprogramma's. Daardoor lopen sommige bedrijven miljoenen euro's per jaar aan omzet mis.***"**

Bron: Clou, tijdschrift voor marketing, informatie en research, december 2006, blz. 6.

In het artikel is onder andere gebruik gemaakt van onderstaande frequentieverdeling:

Nooit meer zaken doen?	Aantal	Percentages
Ja		30%
Nee		70%
Totaal	962	100%

a. Welke aantallen moeten er in de lege cellen staan?

b. Teken het bijbehorende cirkeldiagram.

Opgave 3

Bij een non-profit organisatie wordt onderzoek gedaan naar de interne communicatie. Eén van de aspecten die aan de orde komen, is de vraag welke mening men heeft over het personeelsblad. Van de resultaten heeft men de volgende tabel gemaakt:

Mening personeelsblad	**Aantal**
Zeer interessant	120
Interessant	340
Neutraal	475
Oninteressant	50
Zeer oninteressant	15
Totaal	1.000

a. Bepaal de bijbehorende percentages.

b. Maak een staafdiagram over de mening van het personeelsblad.

c. Bepaald de modus en de mediaan.

Opgave 4

TYC Europe is het Europese distributie centrum van TYC Brother Industrial Co. Ltd, een Taiwanese onderneming. Vanuit het hoofdkantoor in Almere worden originele en vervangende automaterialen (lampen, spiegels en condensors) geleverd aan grote zakelijke klanten in Europa.

In een groot onderzoek in Nederland wordt onder andere gevraagd hoeveel geld autorijders bereid zijn neer te leggen voor exclusieve voor- en achterlichten voor een auto. Van de eerste 50 respondenten staan hieronder de bedragen in euro's:

600	1.400	4.000	2.250	1.300
750	800	1.500	3.500	1.500
1.200	1.000	1.600	1.800	1.000
500	1.500	1.200	2.000	900
2.000	2.500	800	800	1.750
1.600	1.200	1.100	1.000	1.600
1.350	4.000	1.150	1.400	750
1.800	900	500	1.900	3.000
900	750	750	500	2.750
1.000	1.000	1.300	600	2.500

a. Maak een frequentietabel met 6 klassen.

b. Teken het bijbehorende histogram.

c. Teken in het histogram tevens het frequentiepolygoon.

d. Teken het relatief cumulatief frequentiepolygoon.

Opgave 5

a. Bereken van de gegevens van opgave 4:

b. Het steekproefgemiddelde.

c. De modus.

d. De mediaan.

e. De spreidingbreedte.

f. De steekproefstandaarddeviatie.

Opgave 6

In een concurrentenanalyse wordt gekeken naar 5 regionale concurrenten van transporteur Quickman. Van deze concurrenten is achterhaald hoeveel geld afgelopen jaar geïnvesteerd is in innovatieve ontwikkelingen (in euro's):

50.000 25.000 70.000 125.000 50.000

Van Quickman zelf is de investering afgelopen jaar 40.000 euro.

a. Bereken van de 6 ondernemingen het populatiegemiddelde, modus en mediaan.

b. Bereken van de 6 ondernemingen de populatiestandaarddeviatie en de spreidingsbreedte.

c. Leg uit waarom je hier σ uitrekent en niet s.

Opgave 7

In een steekproef is aan financiële adviseurs gevraagd wat hun bruto jaar inkomen in euro's bedraagt:

Bruto Inkomen in euro's per jaar	**Aantal**
25.000 tot 40.000	12
40.000 tot 55.000	35
55.000 tot 70.000	24
70.000 tot 85.000	8
85.000 tot 120.000	6
Totaal	85

a. Bereken het steekproefgemiddelde.

b. Bereken de steekproefstandaarddeviatie.

Competentieprikkel

Gamers onthouden reclame

"Zeventig recente videogames waarin reclame wordt gemaakt, zijn door Phoenix Marketing International onderzocht op merkherinnering bij de doelgroep. Ruim 40% herinnert zich bepaalde merken: grote merken worden beter onthouden en spelers van sport- en racegames onthouden de advertenties het beste.

Figuur 1.10

Phoenix Marketing International vroeg naar de advertentieherinneringen van 1502 zogenaamde actieve gamers. Dat zijn personen die in de 30 dagen voorafgaand aan het onderzoek minstens één game hebben gespeeld op een moderne spelcomputer eb in diezelfde tijd minstens één game hebben gekocht, gehuurd of gekregen. Alle deelnemers waren 18 jaar of ouder en er deden evenveel mannen als vrouwen mee. 42% van de gamers herinnerde zich specifieke merken van adverteerders in een game. De best onthouden merken waren, in willekeurige volgorde: Nike, Adidas, Reebok, Coke, Pepsi, Mountain Dew, Gatorade, Ford, BMW, Samsung, McDonald's, KFC, Burger King en Axe. **"**

Bron: Clou, tijdschrift voor marketing, informatie en research, december 2006, blz. 6.

In het artikel is te lezen dat 42% van de gamers zich wel specifieke merken van adverteerders in een game kan herinneren en dus 58% niet.

a. Teken een cirkeldiagram waarin de herinnering aan merken van adverteerders in een game weergegeven wordt.

Veronderstel dat tevens de volgende tabel bij dit onderzoek gemaakt kan worden:

Herinnering/Geslacht	**Man**	**Vrouw**
Ja	360	271
Nee	391	480
Totaal	751	751

b. Teken in één staafdiagram het verschil tussen mannen en vrouwen ten aanzien van de herinnering aan merken van adverteerder in een game.
c. Welk meetniveau hebben de genoemde merken van adverteerders in de laatste zin van het artikel?

Uitwerkingen opdrachten H1

Opdracht 1

Geslacht heeft een nominaal meetniveau.
Mening vormgeving Game 16 heeft een ordinaal meetniveau.
Besteding aan games heeft een ratio meetniveau.

Opdracht 2

Klasse (in dollars)	Aantal	Percentage
0 tot 50	6	30%
50 tot 100	9	45%
100 tot 200	5	25%
Totaal	20	100%

Opdracht 3

De modus is 75 dollar.

Opdracht 4

De mediaan is 75 dollar.

Opdracht 5

Het gemiddelde is 81,75 dollar.

Opdracht 6

De spreidingsbreedte is 185 – 25 = 160 dollar.

Opdracht 7

Het gemiddelde plus of min de standaarddeviatie is:

81,75 plus of min 47,77, dus we vinden het interval

<33,98 ; 129,52>.

Het blijkt dat 13 van de 20 getallen in dit interval zit, m.a.w. 65% van de getallen zit in het interval.

Berekenen we het gemiddelde en plus of min 2 maal de standaarddeviatie, dan krijgen we:

81,75 plus of min 2 * 47,77, dan vinden we het interval

<-13,79 ; 177,29>.

Hierin liggen alle getallen behalve 185, m.a.w. 19 van de 20 ofwel 95% van de getallen ligt in dit interval.

De conclusie is dat zelfs bij deze kleine aantallen deze vuistregel redelijk goed van toepassing is.

KENNISOPGAVEN H1

Opgave 1

a. Bij een ordinaal meetniveau is er sprake van een volgorde, bij een nominaal meetniveau niet.
b. Bij een interval meetniveau heeft het interval tussen twee waarden een eenduidige betekenis, bij een ordinaal meetniveau niet.
c. Bij een ratio meetniveau is er sprake van een natuurlijk nulpunt, bij een interval meetniveau niet. Hierdoor heeft de verhouding = ratio tussen twee waarden bij het ratio meetniveau een eenduidige betekenis, bij een interval meetniveau niet.

Opgave 2

Een steekproef is een gedeelte van een populatie.

Opgave 3

In een frequentieverdeling staan:

- kopjes voor iedere kolom
- de waarden van een variabele
- de aantallen
- de percentages
- de totalen

Verder als de tabel uit deskresearch verkregen is moet er nog een bronvermelding bij.

Opgave 4

a. Op nominaal en ordinaal meetniveau kan men een staafdiagram maken en een cirkeldiagram.
b. Op interval en ratio meetniveau kan men een histogram, een frequentiepolygoon en een relatief cumulatief frequentiepolygoon maken.

Opgave 5

a. Centrummaten: modus, mediaan en gemiddelde.
b. Spreidingsmaten: spreidingsbreedte en standaarddeviatie.

Opgave 6

a. Een steekproefgemiddeld is gebaseerd op een steekproef uit een populatie. De waarde van het steekproefgemiddelde hoeft niet precies gelijk te zijn aan het populatiegemiddelde. Het steekproefgemiddeld wordt gebruikt als schatter voor het populatiegemiddelde.
b. Bij de steekproefstandaarddeviatie wordt het steekproefgemiddelde gebruikt in plaats van het populatiegemiddelde en bij de steekproefstandaarddeviatie wordt gedeeld door n – 1 in plaats van door N.

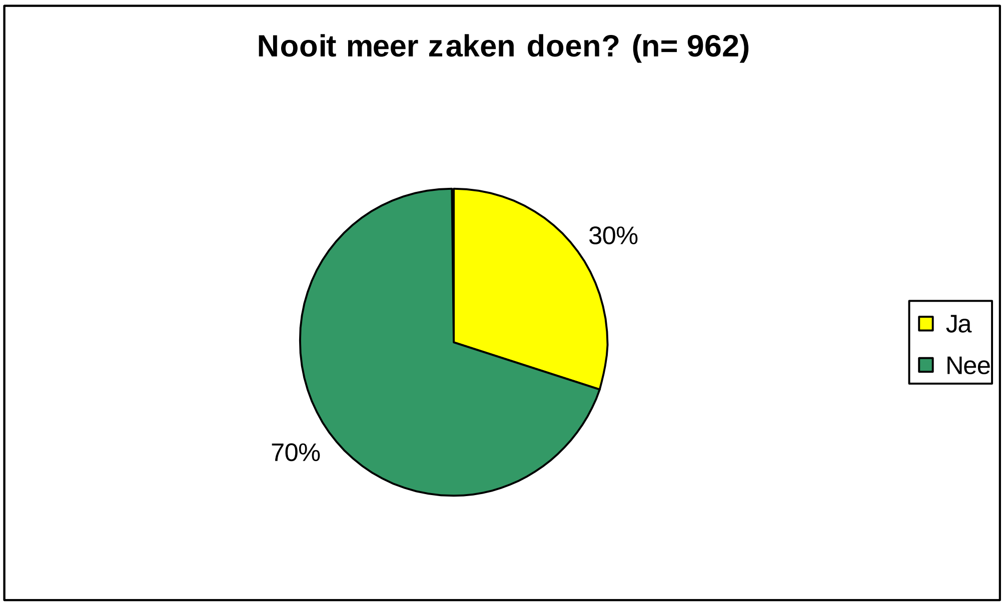
TOEGEPASTE OPGAVEN H1

Opgave 1

- Winst in euro's per maand : ratio
- Paspoortnummer: nominaal
- Mening CD Marco Borsato: ordinaal
- IQ: interval
- Bezit I-Pod?: nominaal
- Uitgave bioscoop in euro's: ratio

Opgave 2

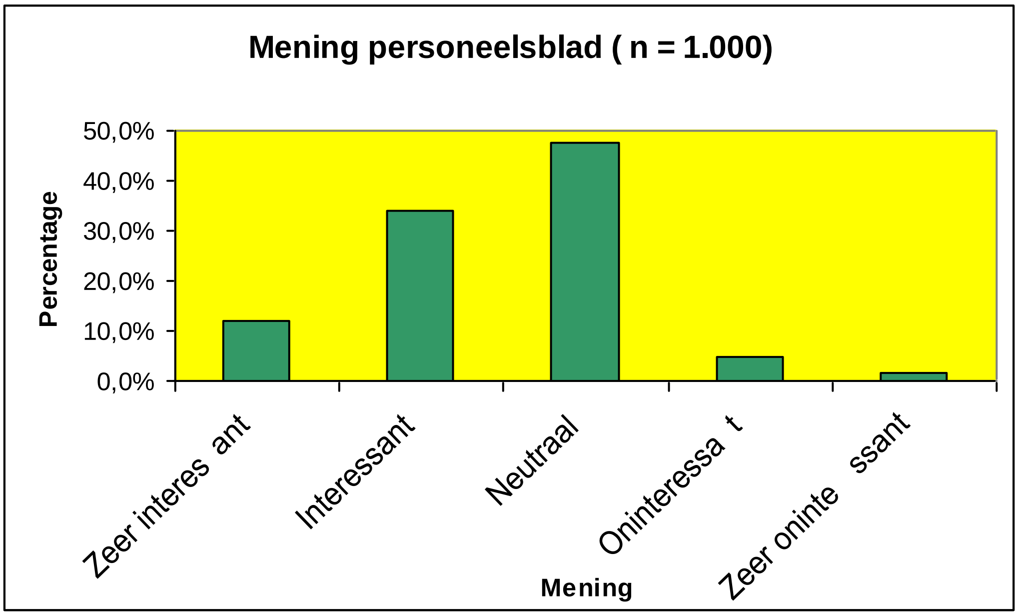
a. 30% van 962 = 288,6. Dat betekent 289 personen die ja hebben gezegd. Verder is 70%van 962 = 673,4. Dat zijn dus 673 personen die nee hebben gezegd.
b.



Bron: Clou, tijdschrift voor marketing, informatie en research, december 2006, blz. 6.

Opgave 3

a. De bijbehorende percentages zijn 12,0%, 34,0%, 47,5%, 5,0% en 1,5%.
b.

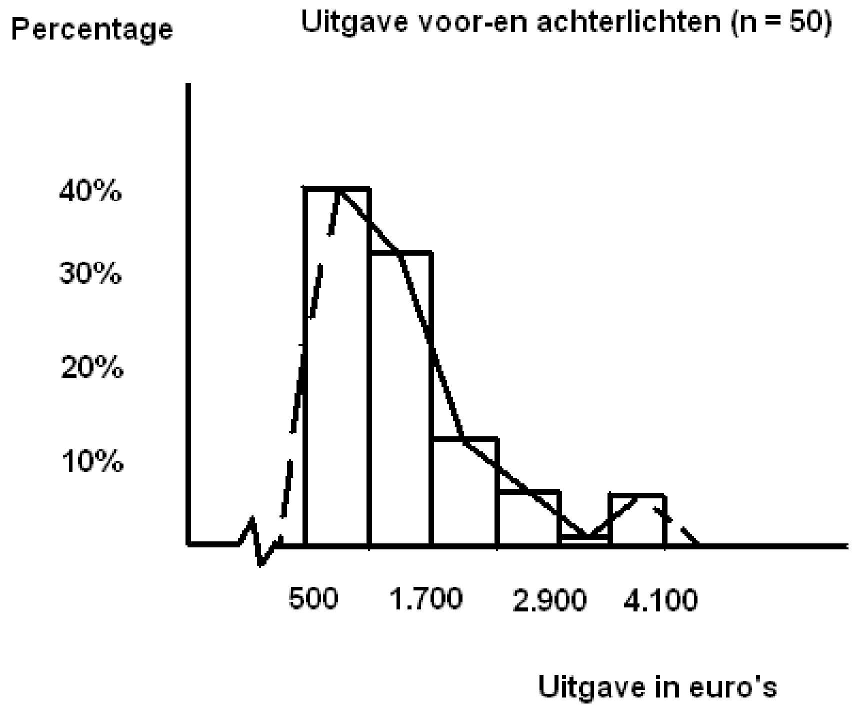


Opgave 4

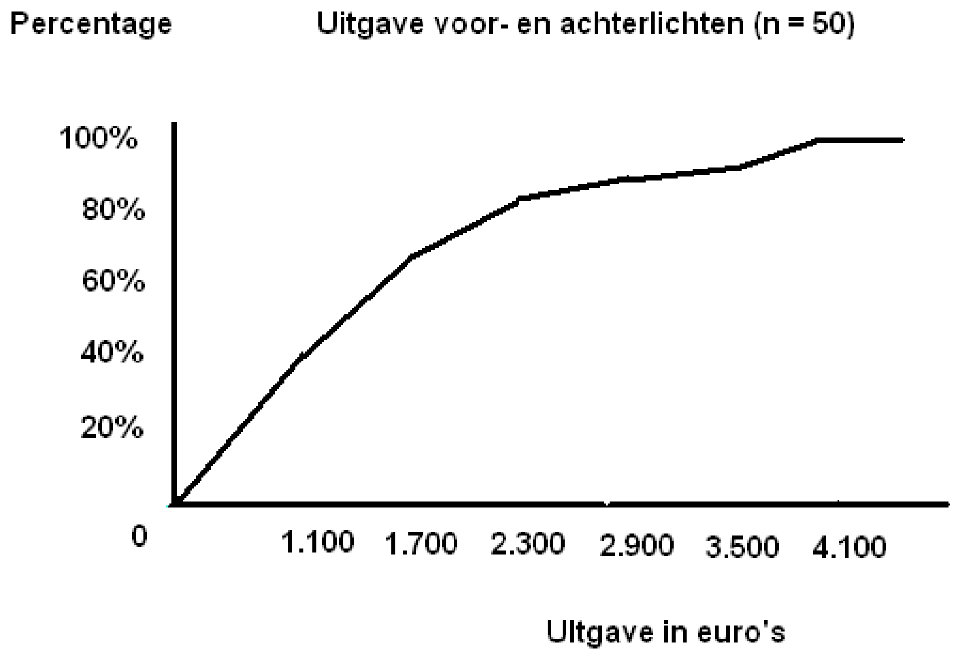
a.

Klasse in euro's	Aantal	Percentage
500 tot 1.100	20	40%
1.100 tot 1.700	16	32%
1.700 tot 2.300	7	14%
2.300 tot 2.900	3	6%
2.900 tot 3.500	1	2%
3.500 tot 4.100	3	6%
Totaal	50	100%

b./c./d.



Klasse in euro's	Percentage	Cumulatief percentage
500 tot 1.100	40%	40%
1.100 tot 1.700	32%	72%
1.700 tot 2.300	14%	86%
2.300 tot 2.900	6%	92%
2.900 tot 3.500	2%	94%
3.500 tot 4.100	6%	100%
Totaal	100%	



Opgave 5

a. Het steekproefgemiddelde is 1.469 euro.
b. De modus is 1.000 euro.
c. De mediaan is 1.250 euro.
d. De spreidingsbreedte is 4.000 – 500 = 3.500 euro.
e. De steekproefstandaarddeviatie is 846,41 euro.

Opgave 6

a. Het populatiegemiddelde is 60.000 euro, de modus is 50.000 euro en de mediaan is 50.000 euro.
b. De populatiestandaarddeviatie is 32.015,69 euro en de spreidingsbreedte is 100.000 euro.

Opgave 7

a.

Bruto inkomen in euro's per jaar	**Aantal**	**Midden**	**Aantal * Midden**
25.000 tot 40.000	12	32.500	390.000
40.000 tot 55.000	35	47.500	1.662.500
55.000 tot 70.000	24	62.500	1.500.000
70.000 tot 85.000	8	77.500	620.000
85.000 tot 120.000	6	102.500	615.000
Totaal	85		4.787.500

Het steekproefgemiddelde is 4.787.500/85 = 56.323,53 euro bruto inkomen per jaar.

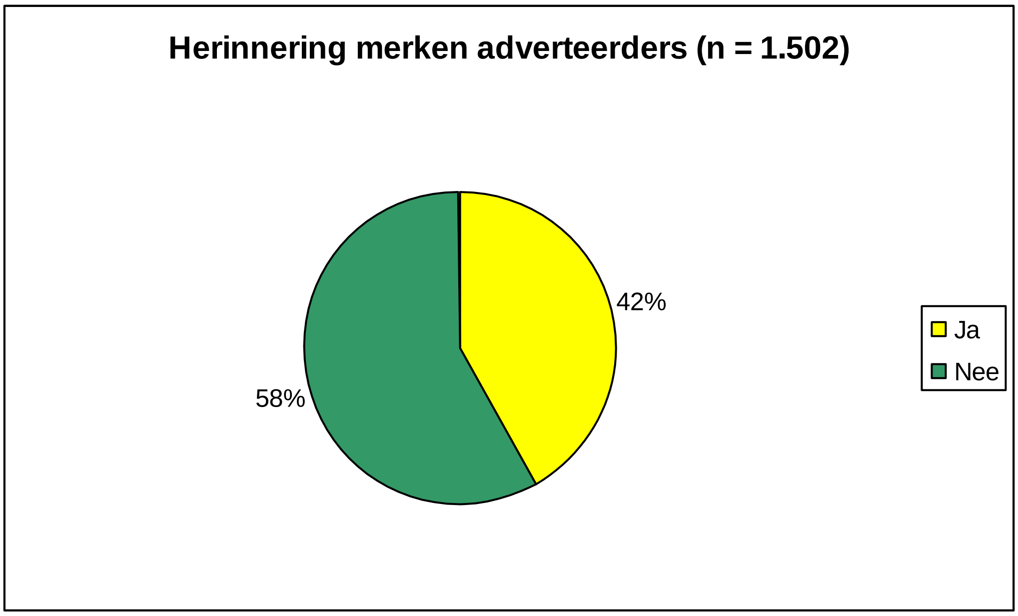
b.

$m_i - \bar{x}$	$(m_i - \bar{x})^2$	$f_i(m_i - \bar{x})^2$
-23.823,53 -8.823,53 6.176,47 21.176,47 46.176,47	567.560.581,70 77.854.681,66 38.148.781,66 448.442.881,70 2.132.266.382,00	6.810.726.980 2.724.913.858 915.570.759,8 3.587.543.054 12.793.589.290
		26.832.352.942

De steekproefstandaarddeviatie is de wortel van 26.832.352.942/84 en is gelijk aan s =17.872,68 euro bruto inkomen per jaar.

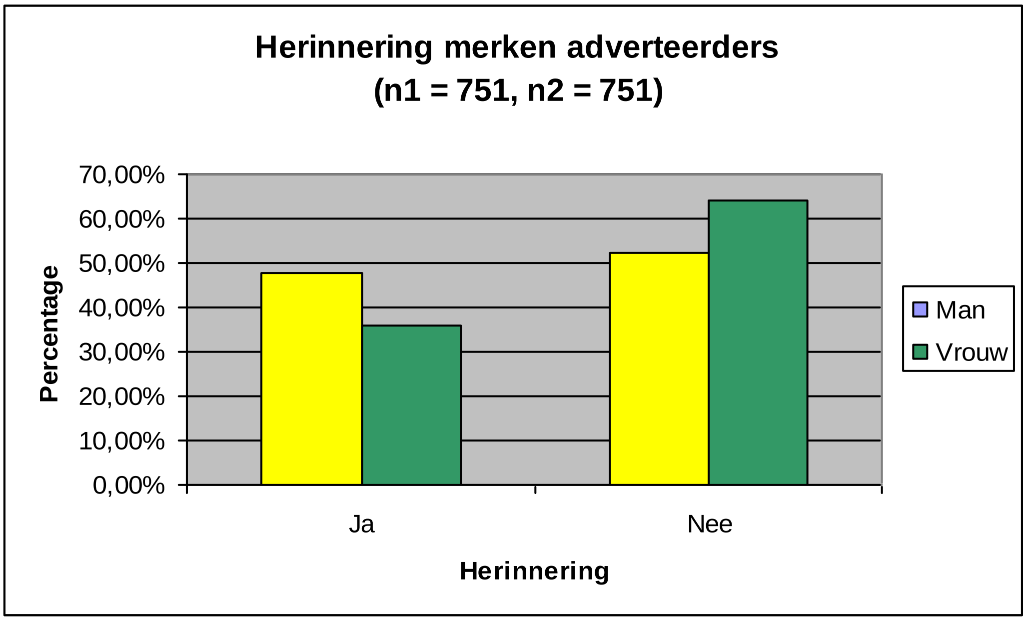
Competentieprikkel

a.



Bron: Clou, tijdschrift voor marketing, informatie en research, december 2006, blz. 6.

b.



Bron: Clou, tijdschrift voor marketing, informatie en research, december 2006, blz. 6.

c. Het meetniveau van de genoemde merken is nominaal.

Hoofdstuk 3 Normale verdeling

3.1 Inleiding en leerdoelen

Inleiding

Bij tal van onderzoeken op economisch gebied verschijnt in een histogram een mooie klokvorm. Dit noemen we de normale verdeling. Deze verdeling wordt gebruikt om kansuitspraken te verrichten. Hoe groot is de kans dat mijn voorraad binnen een gestelde tijd op is, hoe groot is de kans dat de omzet een tegenvallend resultaat laat zien en hoe groot is de kans dat mijn spontane naamsbekendheid is toegenomen?

Allereerst maken we kennis met de standaard normale verdeling, daarna worden met behulp van de standaard normale verdeling kansen berekend bij een willekeurige normale verdeling. Vervolgens wordt gekeken naar drie toepassingen met de normale verdeling.

Leerdoelen

Kennis

- Je kent de standaard normale verdeling en de normale verdeling.
- Je kent de transformatie van de normale verdeling naar de standaard normale verdeling.
- Je kent de eigenschappen van een steekproefgemiddelde waarbij de gegevens afkomstig zijn uit de normale verdeling.
- Je kent de benadering van de binomiale verdeling met de normale verdeling met bijbehorende voorwaarden.

Vaardigheid

- Je kunt kansen bepalen met de standaard normale verdeling met behulp van de tabel van de standaard normale verdeling.
- Je kunt kansen bepalen in de normale verdeling.
- Je bent in staat om kansuitspraken te verrichten van een steekproefgemiddelde waarbij de gegevens afkomstig zijn uit de normale verdeling..
- Je kunt bepalen of de binomiale verdeling benaderd mag worden met de normale verdeling en vervolgens kansuitspraken verrichten met deze benadering.

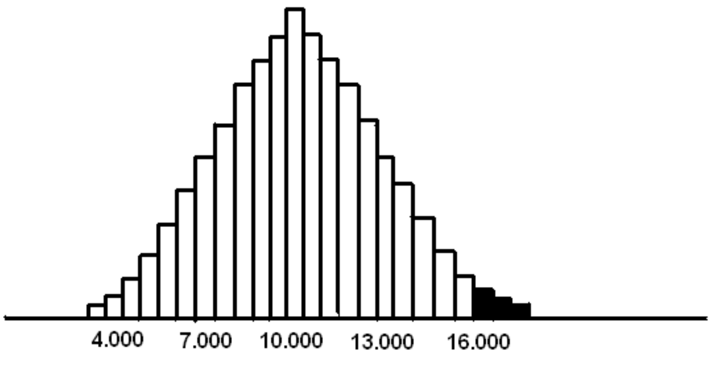
3.2 Case Pinlock

Pinlock Fog-Free Systems is een onderneming die een anticondens vizier voor integraal helmen verkoopt, in de volksmond ook wel Pinlock genoemd. De zaken gaan uitstekend en er is weinig reden tot klagen. Enige punt van aandacht is dat op het moment dat er meer dan 16.000 Pinlocks in een week verkocht worden, de onderneming te kampen heeft met capaciteitsproblemen. Op dat moment moet extra personeel in de productie ingezet worden.

Figuur 3.1

De directie vraagt aan accountmanager Gerbrich Heimel uit te zoeken hoeveel procent van de wekelijkse verkoopaantallen in het algemeen boven de 16.000 stuks ligt. Van het afgelopen jaar maakt hij van de 52 weekgegevens het volgende histogram:

Figuur 3.2

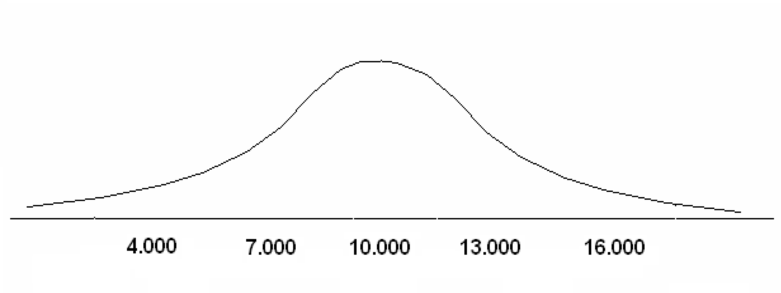


Het gemiddelde is 10.000 stuks en de standaarddeviatie is 3.000 stuks.

Probleem is dat dit histogram slechts betrekking heeft op 52 wekelijkse verkoopaantallen. Beter zou zijn om in een histogram te kijken met alle mogelijke wekelijkse verkoopaantallen. Dit is echter niet voor handen. Gerbrich vraagt zich af hoe hij dit probleem moet oplossen.

3.3 De Standaard Normale Verdeling

In de case is er sprake van een opvallend patroon in de gegevens. Het meest voorkomende verkoopaantal per week is 10.000 stuks. In het figuur is te zien dat er ongeveer evenveel verkoopaantallen boven de 10.000 zijn dan er onder. Het histogram lijkt heel veel op het volgende plaatje.

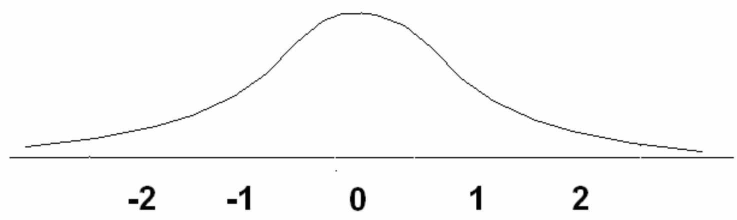


Figuur 3.3

De grafiek in het plaatje heet de **normale verdeling**.

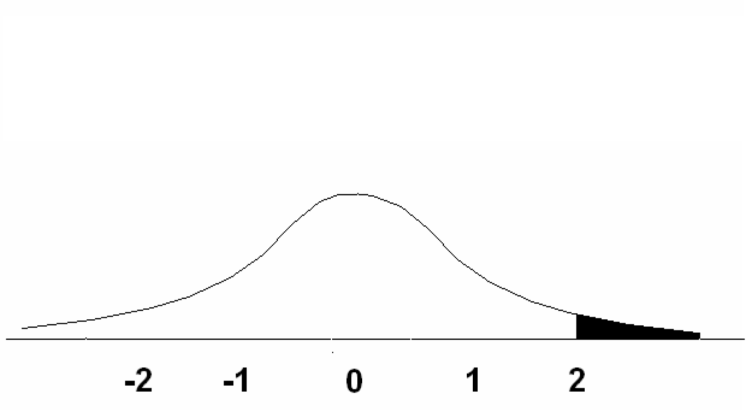
De directie wil weten hoeveel procent van de verkoopaantallen per week in het algemeen boven de 16.000 stuks ligt. Daartoe kan je in het histogram gaan kijken. Beter zou zijn om in een histogram te kijken met alle mogelijke verkoopaantallen. Dit is echter niet voor handen. De normale verdeling wordt gebruikt als ideale voorstelling van het histogram dat men eigenlijk zou willen hebben. Aan de hand van de normale verdeling wordt de vraag van de directie beantwoord.

Om de vraag van de leiding te beantwoorden, bestuderen we eerst een speciaal geval van de normale verdeling. Gekozen wordt $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. We zullen later zien dat alle berekeningen bij een willekeurige normale verdeling herleid kunnen worden tot deze specifieke verdeling. Daarom wordt gesproken van de **standaard normale verdeling**.



Figuur 3.4

Hoe groot is de kans op een waarde groter dan 2? Hiertoe bepalen we de oppervlakte onder deze grafiek rechts van de waarde 2.



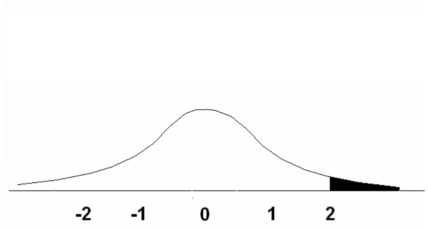
Figuur 3.5

Een manier om deze te vinden is de volgende. Verdeel de oppervlakte rechts van 2 op in hele kleine rechthoekjes. Hoe fijner dat gedaan wordt, hoe preciezer de oppervlakte bepaald kan worden door de oppervlakten op te tellen van de kleine rechthoeken.

Uiteraard is dit een omslachtige manier van werken. Bij iedere waarde moet deze oppervlakte uitgerekend worden. Van de standaard normale verdeling is daarom een **tabel** gemaakt. In deze tabel staan de oppervlakten aan de rechterkant van een positief getal. Zo blijkt de oppervlakte rechts van 2 gelijk te zijn aan 0,0228.

De tabel staat achter in het boek. Voor de duidelijkheid wordt hij hier gegeven en een en ander toegelicht. De notatie die gebruikt wordt om de gegeven kans aan te duiden is $P(\underline{z} > 2{,}00)$. Hierbij duidt de $\underline{z}$ voortaan een kansvariabele uit de standaard normale verdeling aan.

Tabel van de standaard normale verdeling



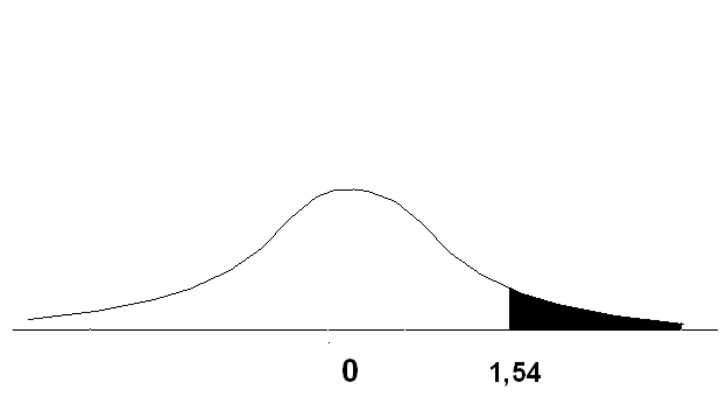
Figuur 3.6

Voorbeeld: P(z > 2,00) = 0,0228.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	,0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007

We nemen de meest voorkomende berekeningen met de standaard normale verdeling met je door aan de hand van vier voorbeelden.

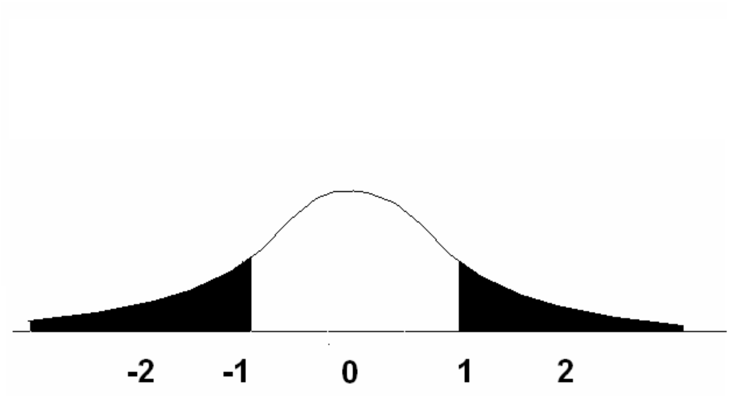
Stel we willen de oppervlakte rechts van 1,54 hebben, dan gaat dit als volgt.



Figuur 3.7

- Neem de eerste kolom en zoek hierin 1,5 op.
- Zoek in de eerste rij de waarde 0.04.
- Kruis deze twee ingangen.
- Je vindt de rechteroppervlakte van 1,54.
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan 0,0618.

Als tweede voorbeeld kijken we naar P(z < -1,00).

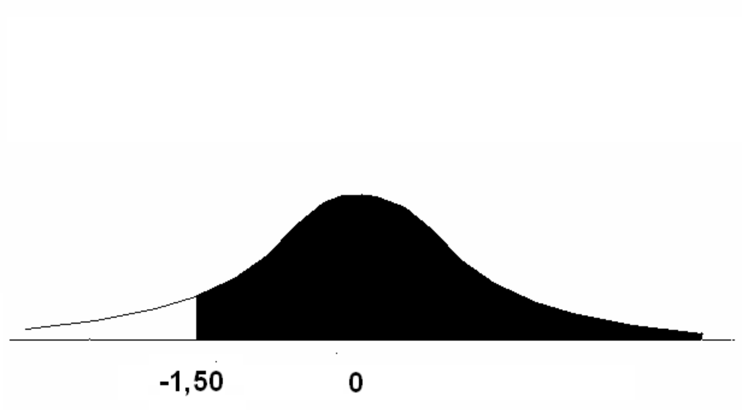


Figuur 3.8

Vanwege de symmetrie is de oppervlakte links van -1,00 even groot als de oppervlakte rechts van 1,00.

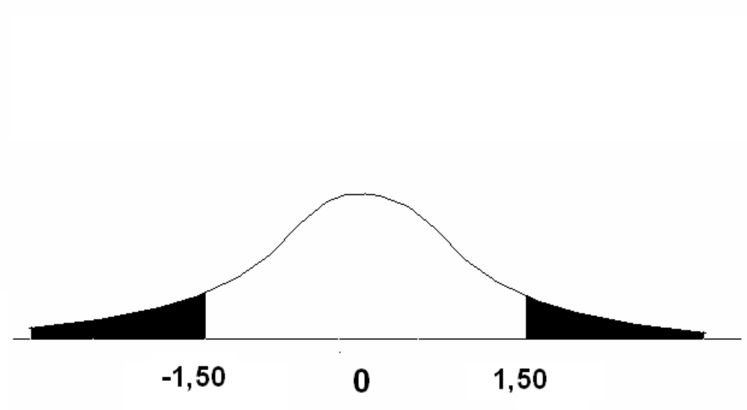
- Kijk in de tabel bij 1,00.
- Je vindt 0,1587.
- De gevraagde kans is P(z < -1,00) = 0,1587.

Vervolgens kijken we naar P($\underline{z}$ >-1,50).



Figuur 3.9

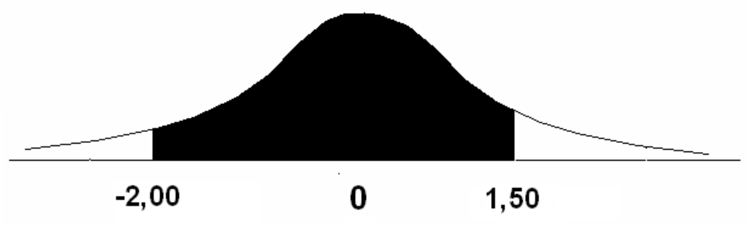
De totale oppervlakte van de grafiek is 1. We merken op dat de linkeroppervlakte van -1,50 gelijk is aan de rechteroppervlakte van 1,50.



Figuur 3.10

Deze is P($\underline{z}$ > 1,50) = 0,0668. De gevraagde kans is nu P($\underline{z}$ > -1,50) = 1 – 0,0668 = 0,9332.

Tot slot vragen we ons af hoe groot is P(-2,00 < $\underline{z}$ < 1,50)?



Figuur 3.11

- Kijk in de tabel bij 2,00.
- De rechteroppervlakte van 2,00 is 0,0228.
- Kijk in de tabel bij 1,50.
- De rechteroppervlakte is 0,0668.
- De linkeroppervlakte van -2,00 is gelijk aan de rechteroppervlakte van 2,00.
- De totale oppervlakte is 1.
- De gevraagde kans P(-2,00 < $\underline{z}$ < 1,50) = 1 – 0,0228 – 0,0668 = 0,9104.

Samengevat kan gezegd worden dat de standaard normale verdeling als kenmerken heeft:

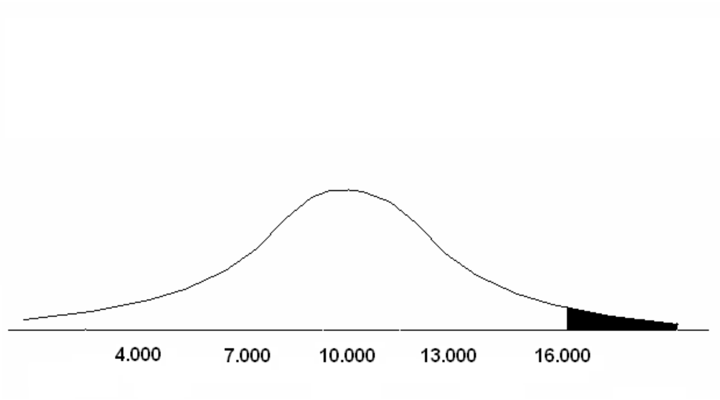
- De typische klokvorm.
- Het midden $\mu = 0$.
- De spreiding $\sigma = 1$.
- De oppervlakten zijn getabelleerd zodat kansen bij deze verdeling te bepalen zijn.

Opdracht 1

Hoe groot is P(-1,25 < $\underline{z}$ < 0,89)?

3.4 De Normale Verdeling

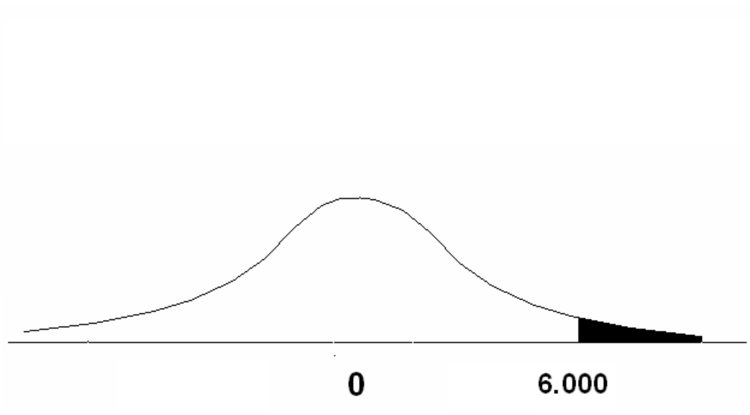
In de case hadden we niet te maken met de standaard normale verdeling, maar met een algemene normale verdeling met een gemiddelde van 10.000 Pinlocks en een standaarddeviatie van 3.000 Pinlocks. We kunnen niet direct in de tabel kijken om het antwoord op het probleem in hoeveel procent van alle weken er meer dan 16.000 stuks worden verkocht, te vinden.



Figuur 3.12

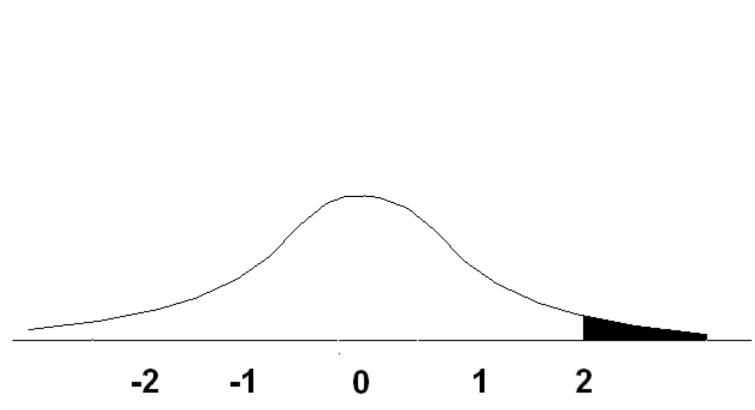
De grafiek lijkt veel op de standaard normale verdeling, maar in het midden staat niet $\mu = 0$ maar $\mu = 10.000$. Als eerste stap halen we van alle waarden op de x-as 10.000 af. Hiermee bereiken we dat het midden 0 wordt.

De waarde die voor ons interessant is, namelijk 16.000 stuks, is ook verminderd met 10.000 en is in de nieuwe grafiek 6.000 geworden. De oppervlakte rechts van 6.000 is even groot als de oppervlakte rechts van 16.000.



Figuur 3.13

De grafiek die gevonden is, lijkt al meer op de standaard normale verdeling. Alleen de waarden op de x-as komen nog niet overeen. De spreiding σ moet 1 worden om gebruik te kunnen maken van de standaard normale verdeling. Delen van alle meetgegevens door 3.000 levert een σ op die 1 is. De waarde 6.000 wordt 6.000/3.000 = 2.



Figuur 3.14

Zoals gezien is de oppervlakte rechts van 2,00 gelijk aan P($\underline{z}$ > 2,00) = 0,0228. In 2,28% van alle weken is het aantal Pinlocks dat verkocht wordt, groter dan 16.000 stuks.

Als we de uitleg samenvatten dan zien we dat we eerst het midden van alle waarden hebben afgetrokken en vervolgens gedeeld hebben door de standaarddeviatie. Noemen we de standaard normale verdeling $\underline{z}$ en een algemene normale verdeling $\underline{x}$, dan berekenen we kansen in de algemene normale verdeling door gebruik te maken van de volgende **transformatie**:

$$\underline{z} = \frac{\underline{x} - \mu}{\sigma}$$

Opdracht 2

Veronderstel dat het gemiddelde verkoopaantal van Pinlock per week 8.000 stuks is met een standaarddeviatie van 2.000 stuks per week.

Hoe groot is de kans dat in een willekeurige week meer dan 9.000 stuks verkocht worden?

3.5 Sigma gebieden

In hoofdstuk 1 hebben de toepassing gezien van de standaarddeviatie bij grote aantallen:

- 68% van de gegevens zit in tussen het gemiddelde en plus of min de standaarddeviatie.
- 95% van de gegevens zit in tussen het gemiddeld en plus of min twee maal de standaarddeviatie.

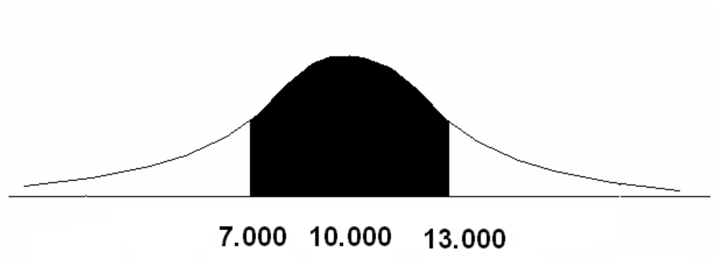
Deze vuistregels leveren de zogenaamde **sigma gebieden.**

- ***het één sigma gebied is het gemiddelde plus of min de standaarddeviatie en bevat 68% van de gegevens.***

- ***het twee sigma gebied is het gemiddelde plus of min twee maal de standaarddeviatie en bevat 95% van de gegevens.***

De oorsprong van deze sigma gebieden komt van normale verdeling af. We illustreren dit met het volgende voorbeeld

We keren terug naar de case met de anticondens vizieren van Pinlock. Het één sigma gebied is van 10.000 – 3.000 = 7.000 stuks tot 10.000 + 3.000 = 13.000 stuks.



Figuur 3.15

De kans P(7.000 < $\underline{x}$ < 13.000) wordt als volgt gevonden:

- we halen van 7.000 en 13.000 het gemiddelde 10.000 af.
- daarna delen we door de standaarddeviatie 3.000.
- we vinden de waarden -1,00 en 1,00 gevonden.
- we kijken in de tabel bij 1,00 en vinden wederom 0,1587.

Dan volgt $P(-1 < \underline{z} < 1) = 1 - P(\underline{z} < -1) - P(\underline{z} > 1) = 1 - 2 * P(\underline{z} > 1) = 1 - 2 * 0{,}1587 = 0{,}6826$.
Het blijkt dat 68,26% van alle waarnemingen inzit tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

Dit komt overeen met het één sigma gebied. Op overeenkomstige wijze kan het **twee sigma gebied** bepaald worden.

Opdracht 3

Bepaal met de gegevens van de case P(4.000 < $\underline{x}$ < 16.000).

De voorwaarde om de vuistregels toe te passen is dat de gegevens afkomstig dienen te zijn uit de normale verdeling. Je kunt dit controleren in het histogram dat je van de verzamelde gegevens kunt maken.

3.6 Gemiddelde en Normale Verdeling

In een onderzoek wordt gekeken naar de uitgave per huishouden per kwartaal aan video on demand, het bestellen van digitale films via de kabel. Vorig kwartaal bleek dat deze uitgave onder de huishoudens die digitale televisie hebben, normaal verdeeld is met een gemiddelde besteding van $\mu = 40$ euro per kwartaal en met een standaarddeviatie van $\sigma = 12$ euro.

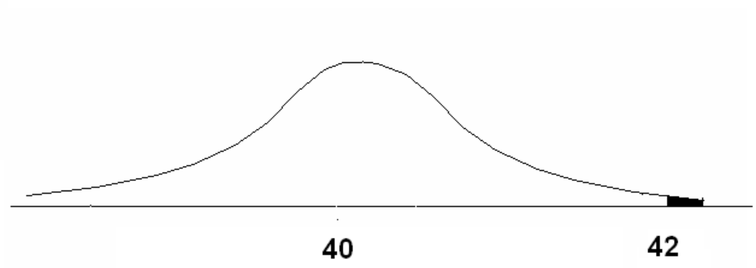
De kabelmaatschappij heeft een groot reclame offensief gehouden in de laatste week van het vorige kwartaal en gaat na of de gemiddelde besteding toegenomen is.

Figuur 3.16

Hiertoe worden in een steekproef naar 225 huishoudens gekeken.. De kabelmaatschappij is zich volledig bewust van het feit dat door toeval een steekproefgemiddelde kan worden gevonden dat boven de 40 euro ligt, terwijl de gemiddelde besteding niet veranderd is. Pas als er een steekproefgemiddelde van meer dan 42 euro gevonden wordt, dan concludeert men dat het steekproefgemiddelde zo ver afwijkt van de oorspronkelijke 40 euro, dat er sprake is van een toename in de gemiddelde uitgave aan video on demand.

Om deze uitspraak te staven wordt de kans berekend dat het steekproefgemiddelde boven de 42 euro ligt als er niets veranderd is in de huishoudens.

Hoe groot is $P(\bar{x} > 42)$?



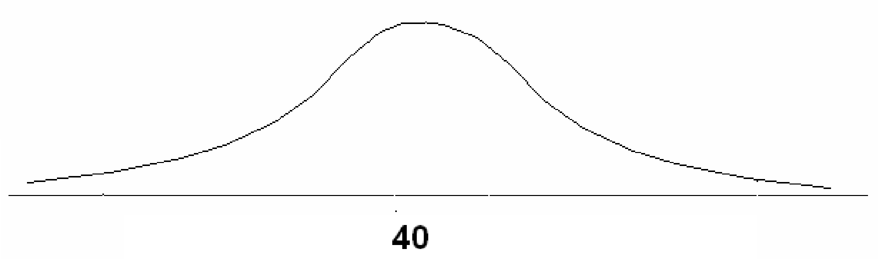
Figuur 3.17

Om deze kans te kunnen berekenen, kijken we eerst naar de eigenschappen van een steekproefgemiddelde.

Als verzamelde gegevens afkomstig zijn uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ, dan is $\bar{x}$ normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ/√n.

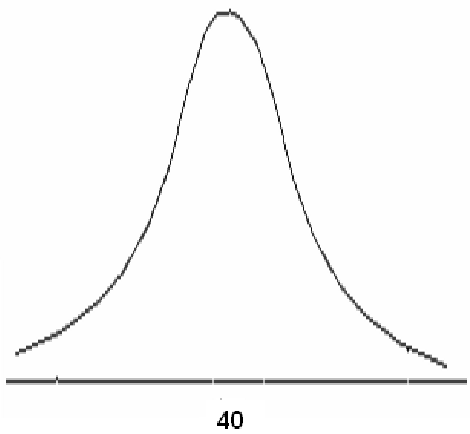
Gedachtegang achter deze eigenschap is dat als je een steekproefgemiddelde neemt, je kunt verwachten dat je enige mate in de buurt zult zitten van het populatiegemiddelde. In welke mate je met je steekproefgemiddelde afwijkt van je populatiegemiddelde wordt uitgedrukt door de term σ/√n. We illustreren dit met het volgende voorbeeld.

Als je weinig gegevens verzameld, dus n is klein, dan is deze term groot te noemen. Je kunt met het steekproefgemiddelde redelijk ver af zitten van het populatiegemiddelde zodat de normale verdeling van het steekproefgemiddelde breder wordt.



Figuur 3.18

Maar als je veel gegevens verzameld dan wordt de term σ/√n klein. En dat betekent dat je door meer gegevens te verzamelen steeds dichter in de buurt komt van het populatiegemiddelde. De normale verdeling van het steekproefgemiddelde wordt daardoor spitser.



Figuur 3.19

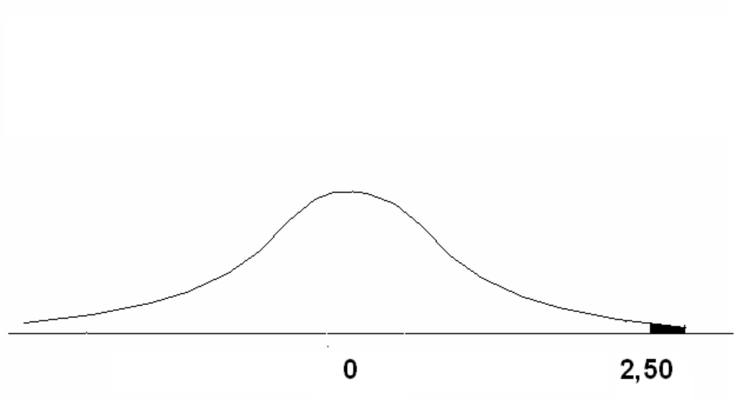
Men noemt de term **σ/√n de standaardfout.**

Oplossing van de gestelde vraag gaat in drie stappen:

1. Bepaal μ en $\sigma/\sqrt{n}$.
2. Pas de transformatie toe naar de standaard normale verdeling.
3. Bepaal de gevraagde kans.

Oplossing:

1. In de tekst staat dat $\mu = 40$ euro en $\sigma = 12$ euro. Dat betekent dat $\sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{225} = 0{,}80$ euro.
2. We passen de transformatie toe naar de standaard normale verdeling op de waarde 42 euro:
$$z = \frac{42 - 40}{0{,}80} = 2{,}50\,.$$
3. De rechteroppervlakte van $z = 2{,}50$ is volgens de tabel 0,0062.



Figuur 3.20

De kans om een gemiddelde te vinden dat groter is dan 42 euro is gelijk aan 0,0062. Dit is erg onwaarschijnlijk. Als er een gemiddelde daadwerkelijk gevonden wordt boven de 42 euro, dan concludeert de kabelmaatschappij dat de gemiddelde besteding aan video on demand is toegenomen.

Opdracht 4

Hoe groot is de kans dat het steekproefgemiddelde groter is dan 41,50 euro?

3.7 Benadering Binomiale Verdeling met Normale Verdeling

Het automerk Cadillac is in Nederland nog niet goed gepositioneerd voor de overeenkomstige doelgroep. De spontane naamsbekendheid is erg laag te noemen, namelijk 10%. Cadillac doet er van alles aan om dit percentage te verhogen. Zo worden er regionale testdagen georganiseerd, waarbij iedereen in een Cadillac kan rijden. Na een jaar lang veel aandacht te besteden aan promotie hoopt men dat de spontane naamsbekendheid is toegenomen. Door middel van een onderzoek onder 400 personen wordt gemeten hoe groot de spontane naamsbekendheid is.

Bij Cadillac gaat men er van uit dat er minstens 50 personen in het onderzoek gevonden gaan worden die spontaan Cadillac noemen.

Hoe groot is de kans op minstens 50 personen die Cadillac spontaan noemen als de spontane naamsbekendheid niet veranderd is?

We lossen dit probleem in zes stappen op:

1. Herkenning binomiale verdeling.
2. Controleren voorwaarden benadering met normale verdeling.
3. Toepassen continuïteitscorrectie
4. Bepaling verwachte waarde en standaarddeviatie.
5. Uitvoeren transformatie naar standaard normale verdeling.
6. Bepaling gevraagde kans met de tabel.

De gevraagde uitwerking is:

1. Herkenning van de binomiale verdeling.

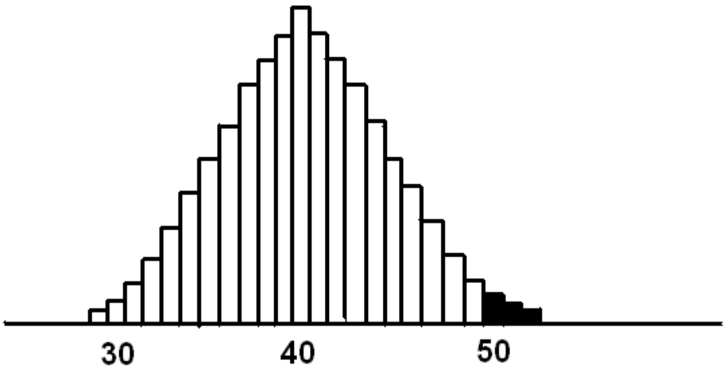
We kijken naar

$\underline{k}$: het aantal personen dat Cadillac spontaan noemt.

$\underline{k}$ is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0{,}10$, immers 400 keer wordt dezelfde vraag gesteld met twee antwoordmogelijkheden: Cadillac wel of niet spontaan noemen. We gaan er van uit dat de achterliggende doelgroep, automobilisten die auto's kopen in een duurder segment, groot is.

2. Controleren voorwaarden benadering met normale verdeling.

Als je in het figuur kijkt, dan zie je de kansfunctie van de binomiale verdeling getekend.



Figuur 3.21

De gevraagde kans kan gevonden worden door gebruik te maken van **de benadering met de normale verdeling**. Je ziet dat het figuur lijkt op de normale verdeling. Bij dit voorbeeld zal blijken dat een benadering met de normale verdeling toegestaan is.

De voorwaarden die hierbij horen zijn:

$np \geq 5$ en
$n(1 - p) \geq 5$

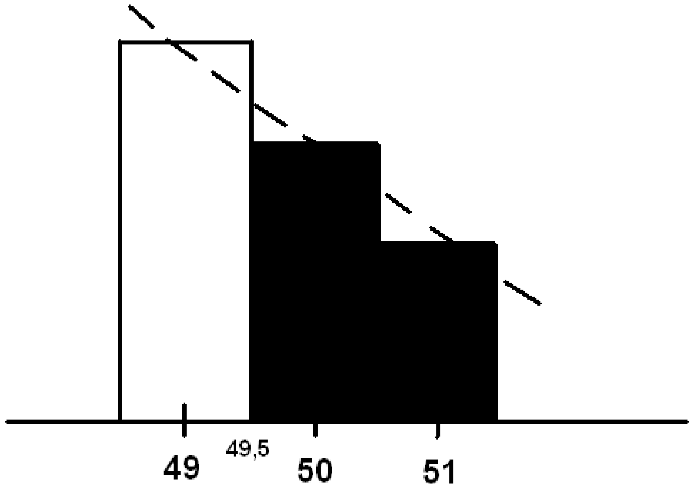
Als we deze voorwaarden in dit voorbeeld controleren, dan zie we:

- $n = 400$
- $p = 0{,}10$
-$1 - p = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$, dus

$np = 400.0{,}10 = 40 \geq 5$ en
$n(1 - p) = 400.0{,}90 = 360 \geq 5$, zodat aan de gestelde voorwaarden wordt voldaan.

3. Toepassen continuïteitscorrectie.

Bij de benadering van de binomiale verdeling met de normale verdeling moeten we een zogenaamde continuïteitscorrectie toepassen. Om dit toe te lichten kijken we eerst in het onderstaande figuur.



Figuur 3.22

In de binomiale verdeling wordt de kans op 50 personen die spontaan Cadillac kunnen noemen weergegeven door de oppervlakte van de kolom met 50 in het midden. Deze kolom heeft als linkergrens 49,5 en als rechtergrens 50,5. Op het moment dat we de normale benadering toepassen, moeten we ons realiseren dat we de oppervlakte van de volledige kolom, dus vanaf 49,5, moeten gebruiken. Voor de oppervlakte vanaf 50 in de binomiale verdeling moeten we in de normale benadering vanaf 49,5 kijken.

Het corrigeren van de waarde 50 naar de waarde 49,5 heeft de naam **continuïteitscorrectie** gekregen.

4. Bepaling verwachte waarde en standaarddeviatie.

In hoofdstuk 5 hebben we gezien wat de verwachte waarde en de standaarddeviatie van de binomiale verdeling is. Deze hebben we nodig bij stap 5.

De verwachte waarde is

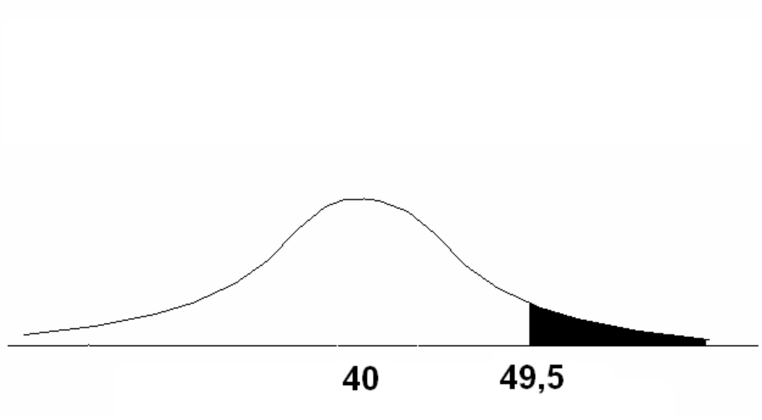
$\mu = np = 400.0{,}10 = 40$ personen die spontaan Cadillac noemen.

De standaarddeviatie is

$\sigma = \sqrt{(np(1-p)} = \sqrt{(400.0{,}10.0{,}90)} = \sqrt{36} = 6$ personen die Cadillac spontaan noemen.

5. Uitvoeren transformatie naar standaard normale verdeling.

Het probleem is vertaald naar de rechteroppervlakte van 49,5 in een normale verdeling met $\mu = 40$ en $\sigma = 6$.



Figuur 3.23

We transformeren dit probleem naar de standaard normale verdeling:

$$z = \frac{49{,}5 - 40}{6} = 1{,}58$$

6. Bepaling gevraagde kans met de tabel.

In de standaard normale verdeling dienen we de rechteroppervlakte te bepalen van z = 1,58. Deze is volgens de tabel gelijk aan 0,0571. De kans dat er minstens 50 personen Cadillac spontaan noemen als de spontane naamsbekendheid 10% is, is gelijk aan 0,0571. Deze kans is klein te noemen en zal aanleiding kunnen geven om bij Cadillac de conclusie te trekken dat de regionale testdagen er voor gezorgd hebben dat de spontane naamsbekendheid is toegenomen als er minstens 50 personen die Cadillac spontaan kunnen noemen, ook daadwerkelijk gevonden worden in het onderzoek.

Opdracht 5

Bepaal de kans op minstens 55 personen in het onderzoek die spontaan Cadillac noemen als de spontane naamsbekendheid nog steeds 10% is.

3.8 Trefwoorden

Standaard normale verdeling Normale verdeling Transformatie naar standaard normale verdeling Sigma gebieden	Eén sigma gebied Twee sigma gebied Standaardfout Benadering binomiale verdeling met normale verdeling

3.9 Samenvatting

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met de normale verdeling. Ieder probleem met de normale verdeling kan opgelost worden door een transformatie toe te passen naar de standaard normale verdeling. Laatstgenoemde is getabelleerd. Met behulp van de normale verdeling is het principe uitgelegd van de één en twee sigma gebieden. Verder hebben we gezien wat de eigenschappen zijn van een steekproefgemiddelde waarbij de gegevens afkomstig zijn uit de normale verdeling. Hiermee hebben we kansen op bepaalde uitkomsten voor het steekproefgemiddelde berekend. Tot slot hebben we de benadering gezien van de binomiale verdeling met de normale verdeling.

<u>Formules</u>:

$$\text{Transformatie: } \underline{z} = \frac{\underline{x} - \mu}{\sigma}$$

Standaardfout: $\sigma/\sqrt{n}$

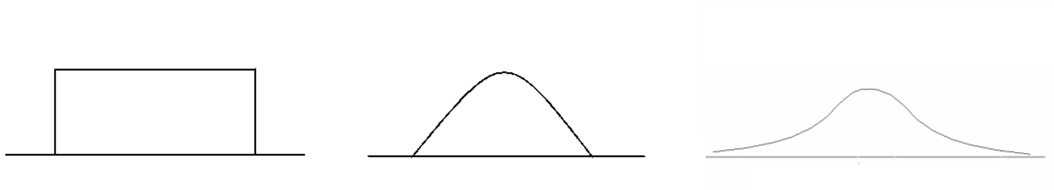
Voorwaarden benadering binomiale verdeling met normale verdeling:

$np \geq 5$ en $n(1 - p) \geq 5$

3.10 Kennisopgaven

Opgave 1

Welke grafiek is een normale verdeling?



Figuur 3.24

Opgave 2

Welke waarden hebben μ en σ bij de standaard normale verdeling?

Opgave 3

Hoe luidt de transformatie van de normale verdeling naar de standaard normale verdeling?

Opgave 4

Geef de interpretatie van de één en twee sigma gebieden.

Opgave 5

Welke eigenschappen heeft het steekproefgemiddelde waarbij de gegevens afkomstig zijn uit een normale verdeling?

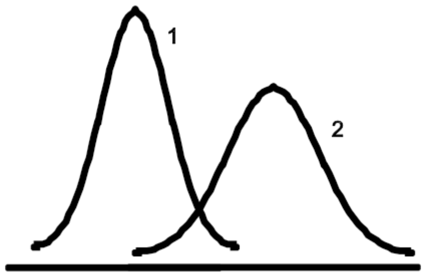
Opgave 6

Welke voorwaarden zijn er voor de benadering van de binomiale verdeling met de normale verdeling?

3.11 Toegepaste opgaven

Opgave 1

De volgende grafiek is gegeven:



Figuur 3.25

Ga na of de onderstaande beweringen al dan niet correct zijn.

a. $\mu_1 > \mu_2$.

b. $\sigma_1 = \sigma_2$.

c. $\sigma_1 < \sigma_2$.

Opgave 2

Bereken:

a. P($\underline{z}$ > 1,23).

b. P($\underline{z}$ < -1,00).

c. P($\underline{z}$ < 0,50).

d. P($\underline{z}$ > -2,01).

e. P(-0,50 < $\underline{z}$ < 0,25).

f. P($\underline{z}$ = 2).

Opgave 3

B&S International is een handelsbedrijf met meer dan 10.000 zakelijke klanten. Met grote opslagplaatsen in Dordrecht en Delfzijl worden vanuit Nederland wereldwijd goederen geleverd. Door middel van kwaliteitscontroles, een perfecte logistiek en een professioneel team weet BS International zijn klanten op tijd en op maat de gevraagde orders te leveren.

Figuur 3.26

Het aantal vervoerde goederen per week door B&S International, genoteerd met $\underline{x}$, is normaal verdeeld met $\mu = 300.000$ en $\sigma = 30.000$.

Bereken:

a. $P(\underline{x} > 360.000)$.

b. $P(\underline{x} < 250.000)$.

c. $P(280.000 < \underline{x} < 340.000)$.

Opgave 4

De verkoop van jeans is normaal verdeeld bij een grote jeanswinkel. Gemiddeld wordt er voor 15.000 euro per week aan jeans verkocht, met een standaarddeviatie van 1.000 euro.

a. Hoe groot is de kans dat er voor minder dan 13.500 euro verkocht wordt in een willekeurige week?

b. In hoeveel procent van alle weken wordt er voor meer dan 14.500 euro verkocht?

Opgave 5

'Entertainmentmarkt groeit licht in 2006

De omzet voor entertainmentproducten als muziek, video en games is licht gestegen ten opzichte van het jaar daarvoor. Daarmee lijkt de trend dat er vooral sprake was van scherpe dalingen doorbroken. Belangrijke groeiers zijn de spelconsoles en de muziekdownloads, terwijl ook de dvd-markt een plus laat zien. In totaal besteedden consumenten 986 miljoen euro aan entertainmentproducten.

Dankzij een groot aantal succestitels en het succes van televisieseries op dvd's, kon de dvd-markt opnieuw een stevige groei laten zien. Opvallend is dat dvd's vooral tijdens de feestmaanden massaal gekocht worden. Met 1,5 miljoen dvd's in de week voor kerst, zijn dvd's een geliefd cadeau. Vooral titels als Pirates of the Caribbean2, Da Vinci Code, Harry Potter 4, Ice Ages 2, Chronicles of Narnia, King Kong, Over the Hedge, Cars, Mission Impossible 3 en Chicken Little deden het goed.'

Bron: Clou, tijdschrift voor Marketing, Informatie en Research februari 2007, blz. 5.

Aan 25 personen wordt in de week voor de feestdagen gevraagd wat ze besteed hebben aan dvd's. Van te voren werd verwacht dat er gemiddeld per persoon 35 euro zou worden besteed met een standaarddeviatie van 10 euro.

a. Hoe groot is de kans dat het steekproefgemiddelde groter is dan 37,50 euro?

b. Hoe groot is de kans dat er minstens 34,50 euro gemiddeld besteed is door deze 25 personen?

Opgave 6

In Nederland is er sprake van een fileproblematiek. Iedere werkdag zijn er wel files te melden. Stel dat de lengte van files normaal verdeeld is met een gemiddelde lengte van 6 kilometer en een standaarddeviatie van 1,5 kilometer.

Op een willekeurige werkdag wordt er gemeld dat er 10 files zijn.

a. Hoe groot is de kans dat de gemiddelde lengte van deze files groter is dan 5 kilometer?

b. Hoe groot is de kans dat de gemiddelde lengte van deze files kleiner is dan 7 kilometer?

Opgave 7

In een marktonderzoek wordt aan 625 willekeurige huishoudens gevraagd of men kabeltelevisie heeft. In Nederland heeft 90% van alle huishoudens kabeltelevisie.

a. Hoe groot is de kans dat er minstens 570 huishoudens zijn met kabeltelevisie?

b. Hoe groot is de kans dat er meer dan 580 huishoudens zijn met kabeltelevisie?

Competentieprikkel

In een groot bedrijf worden dvd-spelers geproduceerd. De directie wil de verwachte winst in een jaar weten van een bepaald type dvd-speler. Er wordt gekeken hoeveel van deze dvd-spelers gemaakt worden in een jaar (= 50 werkweken). Daartoe worden de volgende weekaantallen verzameld.

1.440	1.480	1.490	1.480	1.340
1.320	1.360	1.500	1.440	1.410
1.470	1.490	1.350	1.470	1.520
1.480	1.510	1.490	1.440	1.410
1.440	1.360	1.380	1.480	1.330
1.560	1.370	1.400	1.470	1.490
1.410	1.460	1.420	1.260	1.380
1.500	1.360	1.420	1.430	1.420
1.390	1.400	1.390	1.420	1.420
1.300	1.380	1.430	1.420	1.320

Op basis van deze informatie wil men een generalisatieslag maken voor de productie.

a. Maak een histogram met klassenbreedtes van 50 stuks. Begin bij 1.250 -< 1.300.

Nadat het histogram gemaakt is, bestaat de vraag of de productie in het algemeen normaal verdeeld is. Globale inspectie van het gemaakte histogram geeft hierop antwoord.

b. Bereken het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaarddeviatie.

Het steekproefgemiddelde geeft ons informatie wat het populatiegemiddelde zou kunnen wezen. Evenzo geldt dat de steekproefstandaarddeviatie een indicatie is voor de populatiestandaarddeviatie. Ga er nu van uit dat de gevonden resultaten bij b. gelijk zijn aan μ en σ.

c. Bereken het percentage weken dat er minstens 1.450 dvd-spelers gemaakt worden onder de aanname dat we te maken hebben met de normale verdeling. Vergelijk dit antwoord met het percentage weken dat er minstens 1.450 dvd-spelers gemaakt worden op basis van het histogram.

Indien er minder dan 1.450 dvd-spelers gemaakt worden, is de kostprijs 100 euro per stuk. Als er minstens 1.450 stuks per week geproduceerd worden, dan is de kostprijs 90 euro per stuk. Bij verkoop naar een afnemer wordt 125 euro per stuk gevraagd.

d. Bereken de verwachte winst per dvd-speler.

e. Bepaal de verwachte winst per jaar.

OPDRACHTEN H3

Opdracht 1

- Kijk in de tabel bij 1,25.
- De rechteroppervlakte van 1,25 is 0,1056.
- Kijk in de tabel bij 0,89.
- De rechteroppervlakte is 0,1867.
- De linkeroppervlakte van -1,25 is gelijk aan de rechteroppervlakte van 1,25.
- De totale oppervlakte is 1.
- De gevraagde kans $P(-1{,}25 < \underline{z} < 0{,}89) = 1 - 0{,}1056 - 0{,}1867 = 0{,}7977 = 79{,}77\%$.

Opdracht 2

Laat $\underline{x}$: het aantal verkochte Pinlocks in een willekeurige week.

Gegeven is dat $\underline{x}$ normaal verdeeld is met $\mu = 8.000$ Pinlocks en $\sigma = 2.000$ Pinlocks.

Gevraagd wordt $P(\underline{x} > 9.000)$.

We passen de transformatie toe:

$$\underline{z} = \frac{9.000 - 8.000}{2.000} = 0{,}50$$

De rechteroppervlakte van 0,50 in de standaardnormale verdeling is 0,3085 = 30,85%.

Opdracht 3

We herkennen het twee sigma gebied en weten dus dat we 95% moeten gaan vinden.

Gegeven is $\underline{x}$: het aantal verkochte Pinlocks in een willekeurige week.

Gegeven is dat $\underline{x}$ normaal verdeeld is met $\mu = 10.000$ Pinlocks en $\sigma = 3.000$ Pinlocks.

Gevraagd wordt $P(4.000 < \underline{x} < 16.000)$.

We passen de transformatie twee maal toe:

$$\underline{z} = \frac{4.000 - 10.000}{3.000} = -2{,}00 \quad \underline{z} = \frac{16.000 - 10.000}{3.000} = 2{,}00$$

De rechteroppervlakte van 2,00 in de standaardnormale verdeling is 0,0228. Dit is ook de linkeroppervlakte van -2,00. Aangezien de totale oppervlakte 1 is, vinden we:
$P(-2{,}00 < \underline{z} < 2{,}00) = 1 - P(\underline{z} < -2{,}00) - P(\underline{z} > 2{,}00) = 1 - 0{,}0228 - 0{,}0228 = 0{,}9544 = 95{,}44\%$.

Opdracht 4

Oplossing van de gestelde vraag gaat in drie stappen:

4. Bepaal μ en $\sigma/\sqrt{n}$.
5. Pas de transformatie toe naar de standaard normale verdeling.
6. Bepaal de gevraagde kans.

Oplossing:

4. In de tekst staat dat $\mu = 40$ euro en $\sigma = 12$ euro. Dat betekent dat $\sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{225} = 0{,}80$ euro.
5. We passen de transformatie toe naar de standaard normale verdeling op de waarde 42 euro:
$$z = \frac{41{,}50 - 40}{0{,}80} = 1{,}88 .$$
6. De rechteroppervlakte van z = 1,88 is volgens de tabel 0,0301 = 3,01%

Opdracht 5

Minstens 55 betekent bij het uitvoeren van de continuïteitscorrectie dat we vanaf 54,5 dienen te kijken. Het probleem is vertaald naar de rechteroppervlakte van 54,5 in een normale verdeling met $\mu = 40$ en $\sigma = 6$.

We voeren de transformatie naar de standaard normale verdeling uit:

$$z = \frac{54{,}5 - 40}{6} = 2{,}42$$

De rechteroppervlakte van 2,42 in de tabel van de standaard normale verdeling is 0,0078 = 0,78%. Het is erg onwaarschijnlijk dat er minstens 55 personen gevonden worden die spontaan Cadillac kunnen noemen.

KENNISOPGAVEN HOOFDSTUK 3

Opgave 1

De derde grafiek is een normale verdeling.

Opgave 2

Bij de standaard normale verdeling is $\mu = 0$ en $\sigma = 1$.

Opgave 3

De transformatie van de normale verdeling $\underline{x}$ naar de standaard normale verdeling $\underline{z}$ is:

$$\underline{z} = \frac{\underline{x} - \mu}{\sigma}$$

Opgave 4

Het één sigma gebied is het gemiddelde plus of min de standaarddeviatie en bevat 68% van de gegevens.

Het twee sigma gebied is het gemiddelde plus of min twee maal de standaarddeviatie en bevat 95% van de gegevens.

Opgave 5

Het steekproefgemiddelde is normaal verdeeld met een verwachte waarde μ en een standaardfout van $\sigma/\sqrt{n}$.

Opgave 6

De voorwaarden van de benadering van de binomiale verdeling met de normale verdeling zijn:

$$np \geq 5 \text{ en } n(1 - p) \geq 5.$$

TOEGEPASTE OPGAVEN HOOFDSTUK 3

Opgave 1

a. Niet correct.
b. Niet correct.
c. Correct.

Opgave 2

a. P($\underline{z}$ > 1,23) = 0,1093 = 10,93%.
b. P($\underline{z}$ < -1,00) = P($\underline{z}$ > 1,00) = 0,1587 = 15,87%.
c. P($\underline{z}$ < 0,50) = 1 – P($\underline{z}$ > 0,50) = 1 – 0,3085 = 0,6915 = 69,15%.
d. P($\underline{z}$ > -2,01) = 1 – P($\underline{z}$ < -2,01) = 1 – P($\underline{z}$ > 2,01) = 1 – 0,0222 = 0,9778 = 97,78%.
e. P(-0,50 < $\underline{z}$ < 0,23) = 1 – P($\underline{z}$ < -0,50) – P($\underline{z}$ > 0,23) = 1 – P($\underline{z}$ > 0,50) – P($\underline{z}$ > 0,23) = 1 – 0,3085 – 0,4013 = 0,2902 = 29,02%.
f. P($\underline{z}$ = 2) = 0.

Opgave 3

$\underline{x}$: aantal goederen vervoerd door B & S International per week.

$\underline{x}$ is normaal verdeeld met μ = 300.000 goederen per week en σ = 30.000 goederen per week.

a. P($\underline{x}$ > 360.000) = P($\underline{z}$ > (360.000 – 300.000)/30.000) = P($\underline{z}$ > 2,00) = 0,0228 = 2,28%.
b. P($\underline{x}$ < 250.000) = P($\underline{z}$ < (250.000 – 300.000)/30.000) = P($\underline{z}$ < -1,67) = P($\underline{z}$ > 1,67) = 0,0475 = 4,75%.
c. P(280.000 < $\underline{x}$ < 340.000) = P((280.000 – 300.000)/30.000 < $\underline{z}$ < (340.000 – 300.000)/30.000) = p(-0,67 < $\underline{z}$ < 1,33) = 1 – P($\underline{z}$ < -0,67) – P($\underline{z}$ >1,33) = 1 – P($\underline{z}$ >0,67) – P($\underline{z}$ > 1,33) = 1 – 0,2514 – 0,0918 = 0,6568 = 65,68%.

Opgave 4

$\underline{x}$: verkoop van jeans per week.

$\underline{x}$ is normaal verdeeld met μ = 15.000 euro per week en σ = 1.000 euro per week.

a. P($\underline{x}$ < 13.500) = P($\underline{z}$ < (13.500 – 15.000)/1.000) = P(z < -1,50) = P($\underline{z}$ > 1,50) = 0,0668 = 6,68%.
b. P($\underline{x}$ > 14.500) = P($\underline{z}$ > (14.500 – 15.000)/1.000) = P($\underline{z}$ > -0,50) = 1 – P($\underline{z}$ < -0,50) = 1 – P(z > 0,50) = 1 – 0,3085 = 0,6915 = 69,15%.

Opgave 5

$\underline{x}$: besteding aan dvd’s in de week voor de feestdagen in december.

$\underline{x}$ is normaal verdeeld met μ = 35 euro en σ = 10 euro.

Dan is $\underline{\bar{x}}$ normaal verdeeld met μ = 35 euro en $\sigma/\sqrt{n} = 10/\sqrt{25} = 2$ euro

a. $P(\underline{\bar{x}} > 37{,}50) = P(\underline{z} > (37{,}50 – 35)/2) = P(\underline{z} > 1{,}25) = 0{,}1056 = 10{,}56\%$.

b. $P(\underline{\bar{x}} > 34{,}50) = P(\underline{z} > (34{,}50 – 35)/2) = P(\underline{z} > -0{,}25) = 1 – P(\underline{z} < -0{,}25) = 1 – P(\underline{z} > 0{,}25) =$
$1 – 0{,}4013 = 0{,}5987 = 59{,}87\%$.

Opgave 6

$\underline{x}$: lengte in kilometer van file per werkdag..

$\underline{x}$ is normaal verdeeld met μ = 6 kilometer en σ = 1,5 kilometer.

Dan is $\underline{\bar{x}}$ normaal verdeeld met μ = kilometer en $\sigma/\sqrt{n} = 1{,}5/\sqrt{10} = 0{,}4743$ kilometer.

a. $P(\underline{\bar{x}} > 5) = P(\underline{z} > (5 – 6)/0{,}4743) = P(\underline{z} > -2{,}11) = 1 – P(\underline{z} < -2{,}11) = 1 – P(\underline{z} > 2{,}11) = 1 –$
$0{,}0174 = 0{,}9826 = 98{,}26\%$.

b. $P(\underline{\bar{x}} < 7) = P(\underline{z} < (7 – 6)/0{,}4743) = P(\underline{z} < 2{,}11) = 1 – P(\underline{z} > 2{,}11) = 1 – 0{,}0174 = 0{,}9826 =$
$98{,}26\%$

Opgave 7

a. We lossen dit probleem in zes stappen op:

1. Herkenning binomiale verdeling.
2. Controleren voorwaarden benadering met normale verdeling.
3. Toepassen continuïteitscorrectie
4. Bepaling verwachte waarde en standaarddeviatie..
5. Uitvoeren transformatie naar standaard normale verdeling.
6. Bepaling gevraagde kans met de tabel.

1. Herkenning van de binomiale verdeling.

We kijken naar

$\underline{k}$: het aantal huishoudens dat kabeltelevisie heeft.

$\underline{k}$ is binomiaal verdeeld met n = 625en p = 0,90.

2. Controleren voorwaarden benadering met normale verdeling.

De voorwaarden om de binomiale verdeling te benaderen met de normale verdeling zijn:

$np \geq 5$ en
$n(1 – p) \geq 5$

Als we deze voorwaarden controleren, dan zie we:

- n = 625
- p = 0,90
-1 – p = 1 – 0,90 = 0,10, dus

$np = 625.0,90 = 562,5 \geq 5$ en
$n(1 – p) = 625.0,10 = 62,5 \geq 5$.

Aan de gestelde voorwaarden wordt voldaan.

3. Toepassen continuïteitscorrectie.

We corrigeren de waarde 570 naar de waarde 569,5.

4. Bepaling verwachte waarde en standaarddeviatie.

De verwachte waarde is

$\mu = np = 625.0,90 = 562,5$ huishoudens die kabeltelevisie hebben..

De standaarddeviatie is

$\sigma = \sqrt{(np(1-p)} = \sqrt{(625.0,90.0,10)} = \sqrt{56,25} = 7,5$huishoudens die kabeltelevisie hebben.

5. Uitvoeren transformatie naar standaard normale verdeling.

We transformeren het probleem naar de standaard normale verdeling:

$$z = \frac{569{,}5 - 562{,}5}{7{,}5} = 0{,}93$$

6. Bepaling gevraagde kans met de tabel.

Tot slot bepalen we P(z > 0,93) = 0,1762 = 17,62%.

b. Dit onderdeel loop analoog als a. Nu echter is de vraag P(k > 580). Bij de continuïteitscorrectie moeten we op zoek naar de linkergrens van 581. Dat betekent dat bij correctie we uitkomen op 580,5. De overeenkomstige z-waarde is

$$z = \frac{580{,}5 - 562{,}5}{7{,}5} = 2{,}40$$

De rechteroppervlakte van z = 2,40 in de standaard normale verdeling is 0,0082. De gevraagde kans is dus 0,82%.

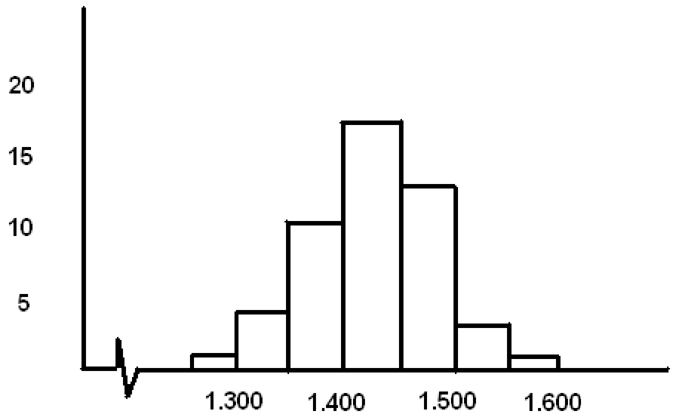
Competentieprikkel

a. Allereerst maken we een frequentieverdeling:

Aantal dvd-spelers (in stuks per week)	**Aantal**	**Percentage**
1.250 tot 1.300	1	2%
1.300 tot 1.350	5	10%
1.350 tot 1.400	10	20%
1.400 tot 1.450	17	34%
1.450 tot 1.500	12	24%
1.500 tot 1.550	4	8%
1.550 tot 1.600	1	2%

Door de klassen even breed te maken is de frequentiedichtheid gelijk aan de frequentie!

Vervolgens teken we het histogram:



b. Het steekproefgemiddelde is 1422 stuks per week en de steekproefstandaarddeviatie is 63,18 stuks per week.

c. Laat x: het aantal geproduceerde dvd-spelers per week.

Dan is x normaal verdeeld met μ = 1422 stuks per week en σ = 63,18 stuks per week.

De gevraagde kans is dan P(x ≥ 1.450) = P(z ≥ (1.450 – 1.422)/63,18) = P(z > 0,44) = 0,3300 = 33,00%.

d. Laat w: winst per dvd-speler zijn, dan is de verwachte winst Ew = 0,3300 * 35 + 0,6700 * 25 = 28,30 euro per dvd-speler.

e. Het totaal aantal geproduceerde dvd-spelers vind je door de 50 weekproducties op te tellen. Dit zijn er 71.100 dvd-spelers per jaar. De verwachte winst is 71.100 * 28,30 = 2.012.130 euro per jaar.

Hoofdstuk 7 Lineaire Verbanden

7.1 Inleiding en leerdoelen

Inleiding

In dit hoofdstuk worden lineaire verbanden behandeld. Voorbeelden van toepassingen van lineaire verbanden zijn aan te geven bij algemene economie de prijs-afzet functie, bij bedrijfseconomie het break-even punt en bij marktonderzoek het onderwerp lineaire regressie.

Allereerst wordt een case gepresenteerd vanuit het vakgebied algemene economie. Hierin wordt een probleem beschreven dat opgelost dient te worden. Daarna volgt uitleg over lineaire verbanden. Ook een korte zijstap naar ongelijkheden in relatie tot lineaire verbanden wordt besproken. Vervolgens wordt er een aantal basisopgaven en toepassingsopgaven gegeven.

Leerdoelen

Kennis

- De student kent de algemene gedaante van een lineair verband
- De student kent de definitie van de richtingscoëfficiënt
- De student weet het verschil tussen expliciete en impliciete lineaire verbanden

Vaardigheden

- de student kan lineaire verbanden opstellen
- de student is in staat lineaire vergelijkingen op te lossen
- de student kan rekenen met ongelijkheden in lineaire verbanden

7.2 Case Vraag en Aanbod

In de EU kan de botermarkt gezien worden als een markt van volledige mededinging. Er zijn veel aanbieders van boter en er zijn veel vragers naar boter. Op een bepaald moment zijn de volgende gegevens bekend op deze markt:

Vraag

- *bij een prijs van 40 euro per ton is de vraag 7 miljoen ton per week*
- *bij een prijs van 60 euro per ton is de vraag 5 miljoen ton per week*

Aanbod

- *bij een prijs van 30 euro per ton is het aanbod 3 miljoen ton per week*
- *bij een prijs van 50 euro per ton is het aanbod 7 miljoen ton per week*

Figuur 1

De Europese Commissie voor Landbouw in Brussel stelt een minimumprijs van 50 euro per ton in om boeren perspectief te bieden op een fatsoenlijk inkomen. Door het instellen van deze minimumprijs ontstaat er een overschot. Dit wordt veroorzaakt doordat de vraag achter blijft bij het aanbod. Het overschot wordt opgekocht door ‘Brussel’ tegen de minimumprijs.

Voordat deze maatregel ingesteld wordt, dient bekend te zijn hoeveel geld dit op jaarbasis gaat kosten. Hierbij wordt de veronderstelling gemaakt dat vraag- en aanbodverbanden tussen prijs en afzet lineair van karakter zijn.

7.3 De grafiek van een lineair verband

In de case wordt opgemerkt dat het verband tussen prijs en afzet lineair is. Een dergelijke opmerking wordt vaker geplaatst in een economische context. Wat wordt hiermee bedoeld?
Om dit duidelijk te maken, nemen we een voorbeeld uit de wiskunde:

$y = 2x + 1$

Wat wil deze uitdrukking ons vertellen?

- Neem een getal in gedachten en noem dit getal x
- Vermenigvuldig dit getal met 2
- Tel bij het resultaat 1 op
- Noem het eindresultaat y

Als bijvoorbeeld het getal 5 in gedachten wordt genomen, dan moet dit vermenigvuldigd worden met 2. Dit levert 10 op. Tot slot tellen we 1 hierbij op. We vinden 11 als eindresultaat.

In dit voorbeeld heten x en y zogenaamde variabelen. Hierbij is

x de onafhankelijke variabele
y de afhankelijke variabele.

De betekenis van een variabele is: afhankelijk van het getal x dat je in gedachten neemt (welke je onafhankelijk van iets kunt kiezen), komt er een wisselend getal y uit (dat afhankelijk is van x). De kracht van een uitdrukking y = 2x + 1 is dus daarin gelegen dat er oneindig veel getallen in te vullen zijn met bijbehorende resultaten.

Het verband y = 2x + 1 is te tekenen in een grafiek. Allereerst berekenen we een aantal y-waarden door zelf x-waarden te kiezen:

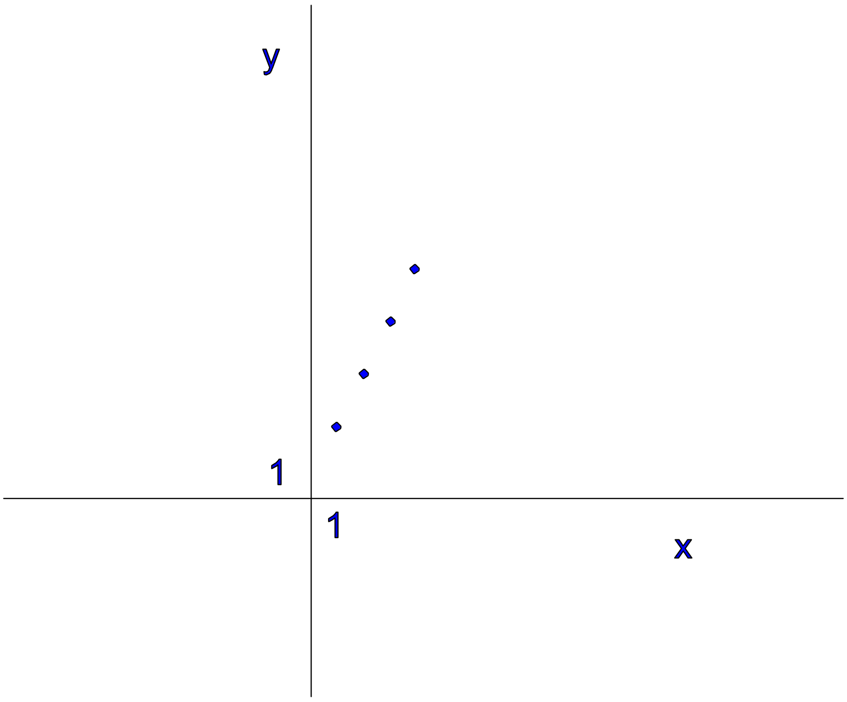
x = 1 levert op y = 2.1 + 1 = 3
x = 2 levert op y = 2.2 + 1 = 5
x = 3 levert op y = 2.3 + 1 = 7
x = 4 levert op y = 2.4 + 1 = 9

We vinden nu de coördinaten van vier punten in een vlak. De eerste waarde is de x-coördinaat en de tweede waarde is de y-coördinaat:

(1, 3)
(2, 5)
(3, 7)
(4, 9)

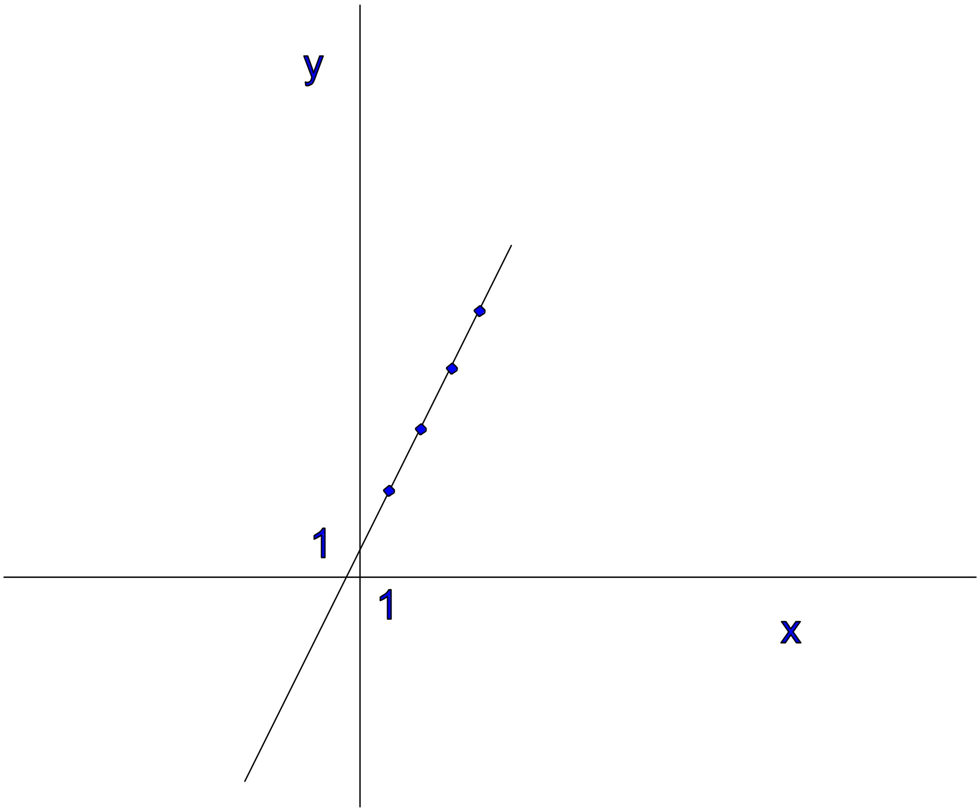
Als we deze punten in een assenstelsel tekenen dan zien we

Figuur 2



Als we een lijn trekken door deze punten dan vinden we

Figuur 3



We beantwoorden de vraag uit het begin van de paragraaf: wat betekent lineair? In de grafiek zie je dat dit betekent dat er een rechtlijnig verband bestaat tussen twee variabelen. En in formulevorm betekent dit dat er op een constante na een recht evenredig verband is tussen twee variabelen.

7.4 De kenmerken van een lineair verband

In de vorige paragraaf hebben we de grafiek getekend van $y = 2x + 1$. Als we in deze uitdrukking de waarden 2 en 1 vervangen door andere getallen, dan loopt de grafiek anders. Om dit goed onder woorden te brengen, kijken we naar:

Regel 1

De algemene gedaante van een lineair verband is: $y = ax + b$

Zodra de a en de b concrete getallen zijn, kunnen we het lineaire verband tekenen. In ons voorbeeld van $y = 2x + 1$ is

$a = 2$
$b = 1$

We noemen

a de richtingscoëfficiënt
b de constante

Voorbeeld 1

Als we kijken naar $y = 3x + 5$ dan is

$a = 3$
$b = 5$

Maar als we kijken naar $y = -3x – 2$ dan is

$a = -3$
$b = -2$

7.5 De snijpunten met de x-as en y-as

Het tekenen van een lineaire functie lijkt niet zo moeilijk: reken een paar coördinaten uit en trek hier een lijn door heen. Deze overweging zorgt er voor dat we in principe slecht 2 coördinaten hoeven uit te rekenen. Immers, als we 2 punten in een vlak hebben, dan is hier een lijn door te trekken.

Twee belangrijke punten voor het tekenen van een willekeurige verband zijn de snijpunten met de x-as en de y-as. Deze punten hebben in een economische context belangrijke interpretaties.

Bij een snijpunt met de y-as is $x = 0$,
bij een snijpunt met de x-as is $y = 0$.

We nemen opnieuw $y = 2x + 1$ en rekenen de snijpunten uit:

<u>Snijpunty-as</u>: we stellen $x = 0$ en vullen dit in: $y = 2.0 + 1 = 0 + 1 = 1$. De coördinaten van het snijpunt met de y-as zijn (0, 1).

<u>Snijpuntx-as</u>: nu stellen we $y = 0$, ofwel

$2x + 1 = 0$

Klaar blijk rolt x niet direct uit het invullen, we moeten op de een of andere manier hier aan gaan rekenen. We noemen deze uitdrukking een lineaire vergelijking.

We halen van beide kanten 1 er af:

$2x + 1 – 1 = 0 – 1$

Maar dan is

2x = -1

We zien het effect van het afhalen van beide kanten van 1:

2x + 1 = 0 en 2x = -1

bevatten dezelfde informatie. Het verplaatsen van een term van links naar rechts (en van rechts naar links!) in een vergelijking heeft een tekenwisseling tot gevolg: de 1 verandert in –1.

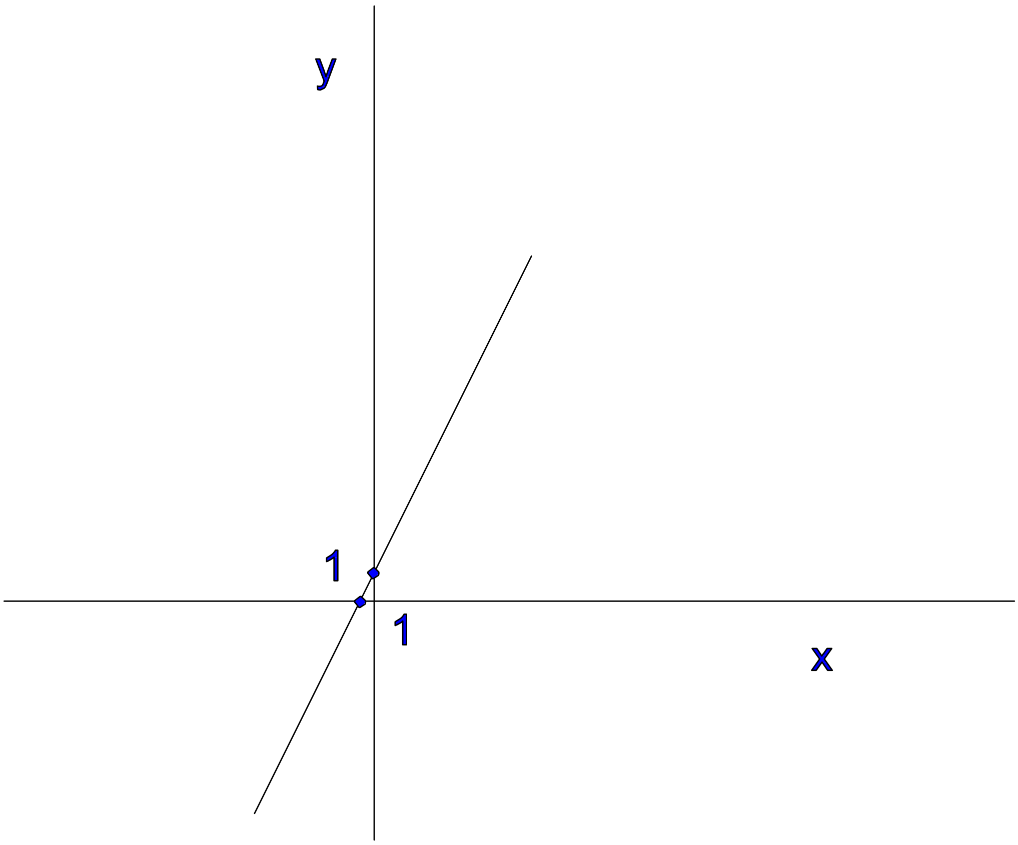
Uitgaande van 2x = -1 delen we nu beide kanten door 2 om links alleen maar x te verkrijgen. Dat betekent dat uit

2x = -1 volgt dat

x = - ½

Het snijpunt met de x-as is (- ½, 0). Tekenen van deze punten en hierna verbinden met een lijn levert uiteraard dezelfde grafiek als de vorige op.

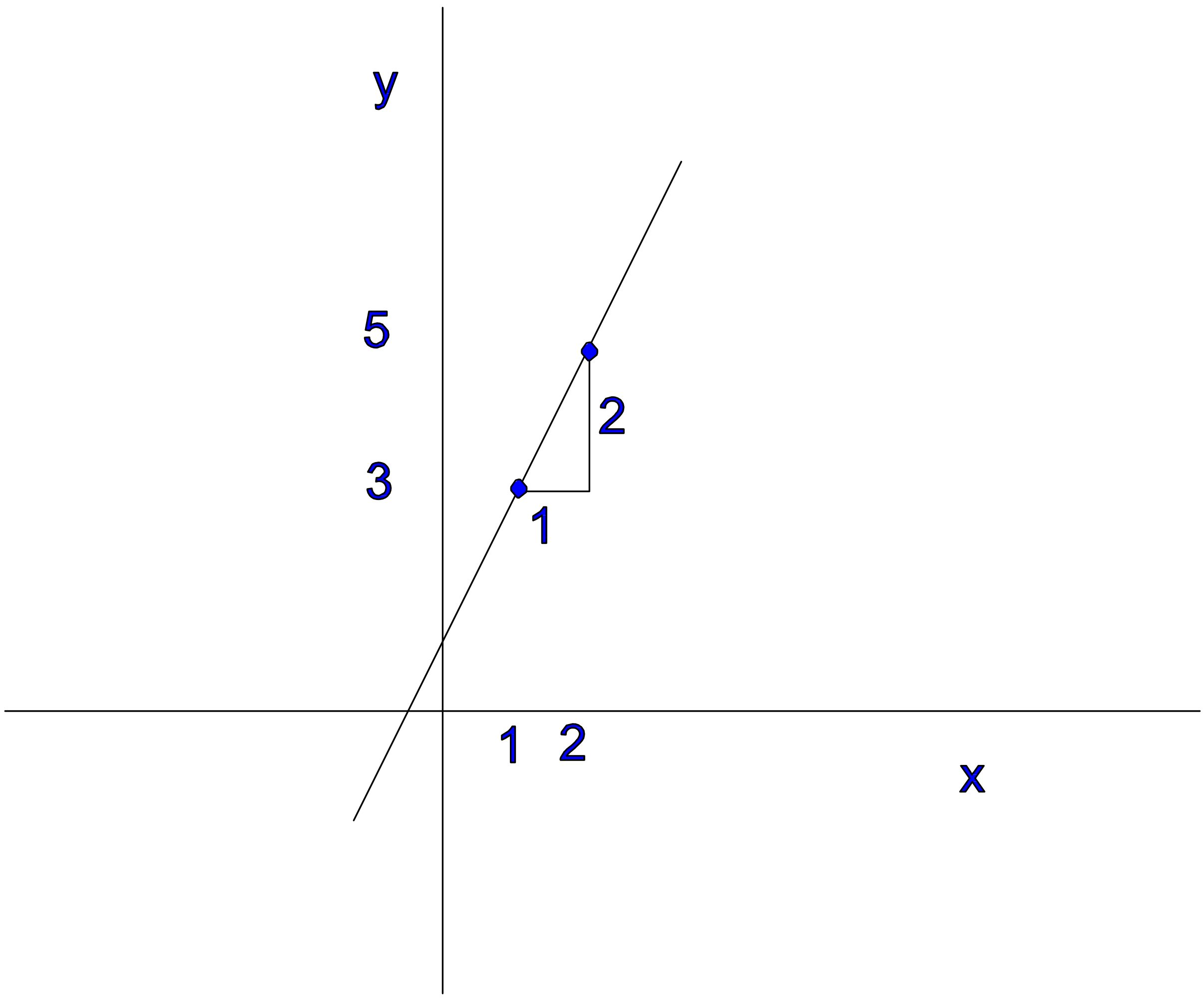
Figuur 4



7.6 De richtingscoëfficiënt

Zoals we gezien hebben is de richtingscoëfficiënt van $y = 2x + 1$ gelijk aan 2. Wat betekent deze waarde precies? Daartoe kijken we in de volgende grafiek.

Figuur 5



In de grafiek is af te lezen dat we allereerst bij x = 1 kijken wat de bijbehorende y-waarde is. Deze is y = 2.1 + 1 = 3. Met andere woorden, bij x = 1 is y = 3.

Gaan we vanuit x = 1 naar x = 2. Waar komen we uit? We vullen x = 2 in en vinden
y = 2.2 + 1 = 5. We komen bij x = 2 uit bij y = 5.

Door op de x-as 1 stap naar rechts te gaan (van x = 1 naar x = 2), gaan we van y = 3 naar y = 5. We gaan 2 stapjes naar boven.

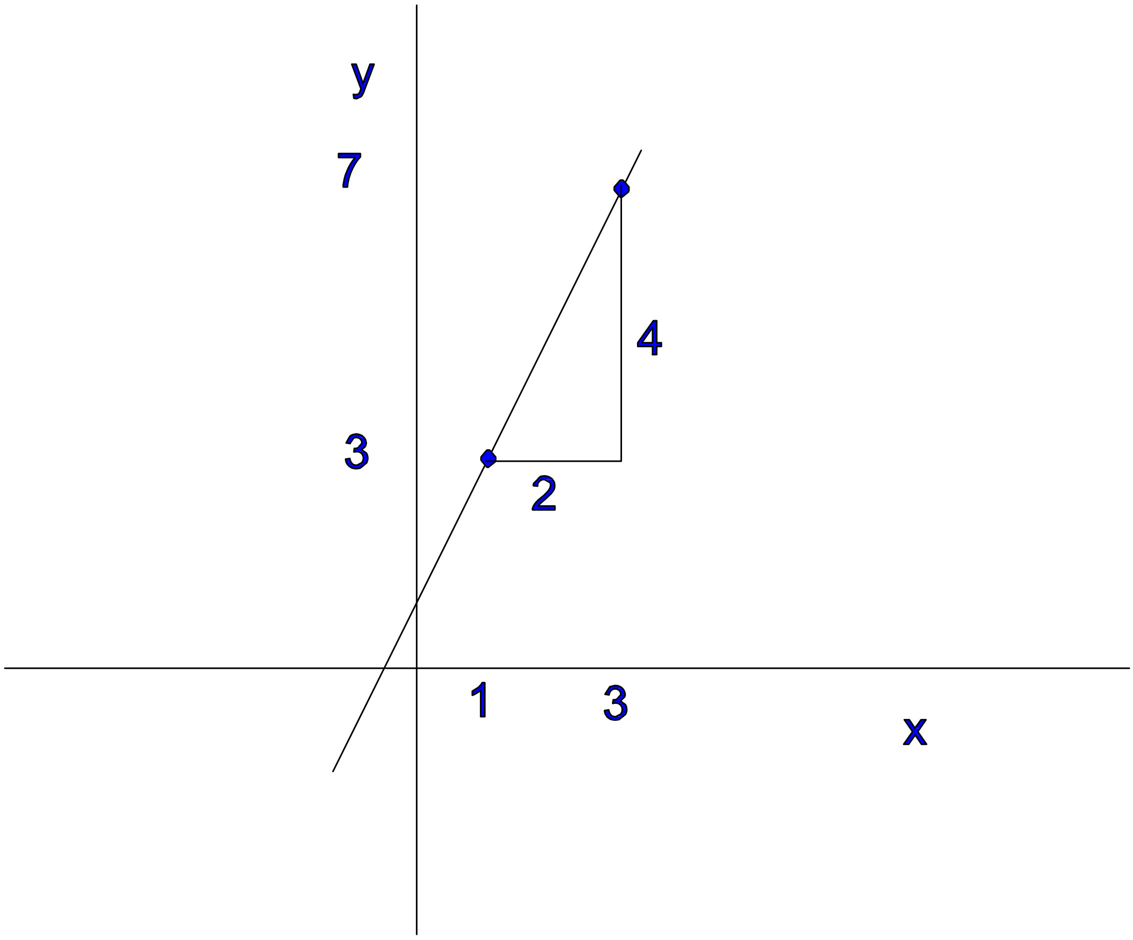
Het verschil tussen twee getallen wordt aangeduid met de Griekse hoofdletter Δ. Deze wordt veel gehanteerd in de economische theorie. Δx betekent het verschil tussen twee x-waarden. In het voorbeeld is Δx = 2 – 1 = 1. Δy betekent het verschil tussen twee y-waarden. In het voorbeeld is Δy = 5 – 3 = 2.

De verhouding van Δy en Δx , dus Δy/Δx = 2/1 is de waarde 2. Maar dat is dezelfde waarde als de richtingscoëfficiënt!

Gaan we vanuit x = 1 echter naar x = 3, dan gaan we ook evenredig veel hoger. Immers, bij x = 3 is y = 2.3 + 1 = 7. Door 2 stapjes op de x-as naar rechts te gaan, gaan we van y = 3 naar y = 7. We gaan dan 4 stapjes naar boven.

Ook nu blijkt de verhouding $\Delta y/\Delta x = 4/2$ gelijk te zijn aan 2. Bij een lijn blijkt deze verhouding constant te zijn en een interpretatie te hebben.

Figuur 6



Deze beschouwing geeft de volgende

Regel 2
Bij een lineair verband $y = ax + b$ geldt dat de richtingscoëfficiënt $a = \Delta y/\Delta x$.

Uit deze definitie volgt het volgende overzicht:

Als $a > 0$, dan is het lineair verband stijgend,
als $a < 0$, dan is het lineair verband dalend,
als $a = 0$, dan is er sprake van een constante.

Voorbeeld 2
$y = 5x + 2$ is een stijgend verband, want $a = 5 > 0$.
$y = -4x + 3$ is een dalend verband, want $a = -4 < 0$.
$y = 7$ is een constante, want $a = 0$.

7.7 Snijpunt van 2 lineaire verbanden

Bij een snijpunt van 2 lineaire verbanden geldt dat de x-coördinaat en de y-coördinaat gelijk dienen te zijn.

Voorbeeld 3

Kijken we naar

$y = 5x + 2$ en
$y = 2x + 7$

We zoeken het snijpunt van deze twee lijnen. Dit vinden we door beide verbanden aan elkaar gelijk te stellen. Dus

$5x + 2 = 2x + 7$

Hoe lossen we dit op? We moeten zorgen dat alle “x-en” aan de linkerkant komen te staan en alle constanten aan de rechterkant van de vergelijking. We halen in herinnering op: een term verplaatsen van de ene kant van een vergelijking naar de andere kant zorgt voor tekenwisseling. De $2x$ moet naar links en wordt $-2x$, de 2 moet naar rechts en wordt -2.

$5x - 2x = 7 - 2$

Dit kunnen we vereenvoudigen tot

$3x = 5$

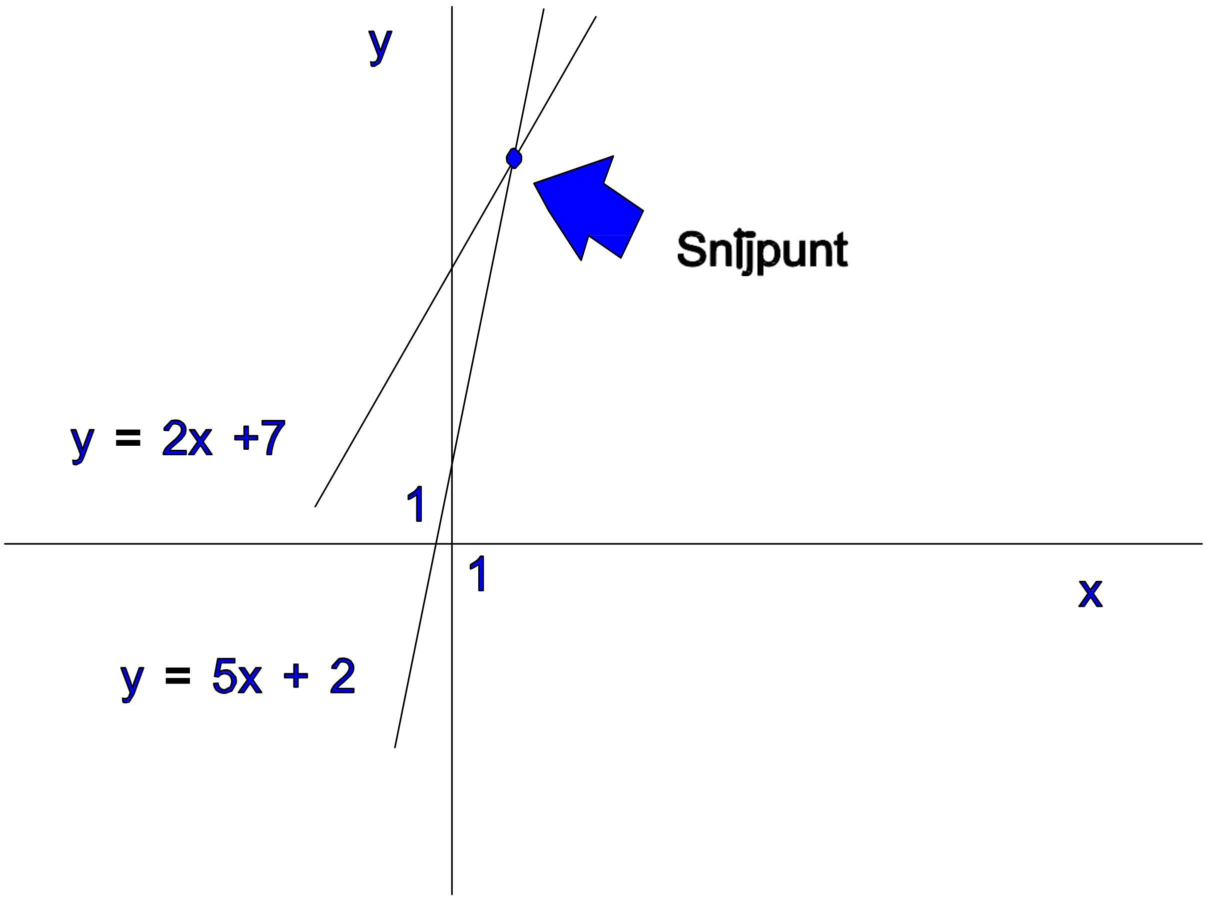
Beide kanten delen door 3 geeft

$x = 5/3$

We hebben de x-coördinaat van het snijpunt, namelijk $x = 5/3 = 1\ 2/3$. Hoe vinden we de y-coördinaat? Daartoe vullen we de gevonden x-waarde in. Daarbij maakt het niet uit in welk lineair verband. Bijvoorbeeld in $y = 2x + 7$ invullen geeft $y = 2.5/3 + 7 = 10/3 + 7 = 3\ 1/3 + 7 = 10\ 1/3$. We vinden $y = 10\ 1/3$.

Het snijpunt is daarom (1 2/3, 10 1/3).

Figuur 7



7.8 Ongelijkheden en lineaire verbanden

Een vraag die we ons in het vorige voorbeeld kunnen stellen is voor welke x-waarden het eerste lineaire verband grotere y-waarden oplevert dan bij het tweede lineaire verband. Daartoe kijken we naar de volgende ongelijkheidstekens:

> betekent groter dan
≥ betekent groter dan of gelijk aan
< betekent kleiner dan
≤ betekent kleiner dan of gelijk aan

We zien dat het groter-teken het symbool > is. Dit gaan we in het volgende voorbeeld gebruiken.

Voorbeeld 4

De twee gegeven lineaire verbanden zijn:

$y = 5x + 2$ en
$y = 2x + 7$

Voor welke x-waarden is $y = 5x + 2$ groter dan $y = 2x + 7$? We stellen hiertoe een ongelijkheid op:

$5x + 2 > 2x + 7$

We lossen dit op door 2x naar links van het groter-teken te brengen en 2 naar rechts:

$5x – 2x > 7 – 2$

ofwel

$3x > 5$

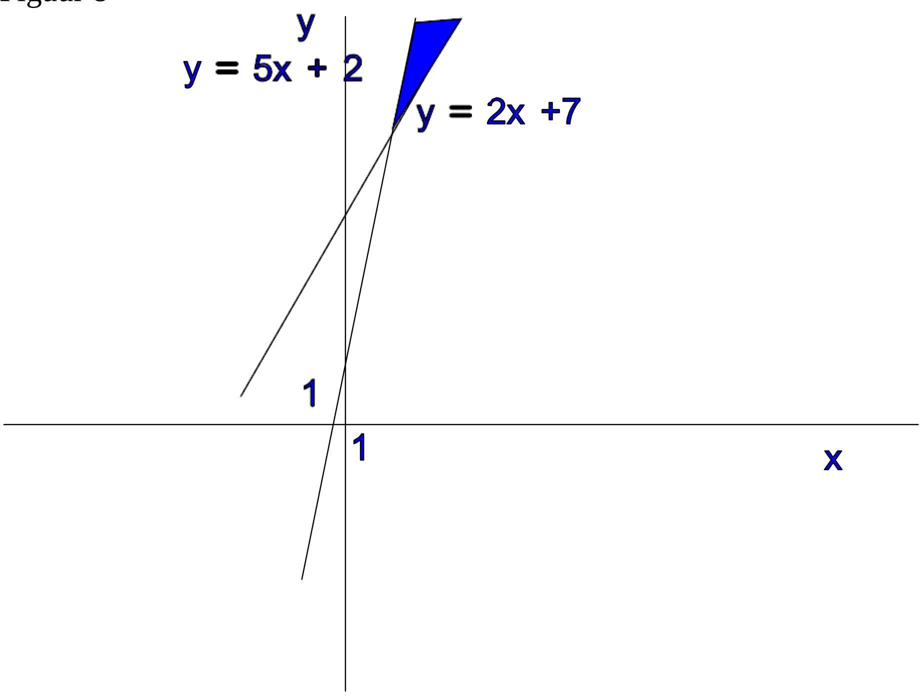
We delen door 3 om een uitspraak te vinden over de x-waarden:

$3x > 5$ delen door 3 levert op

$x > 5/3$.

Dus voor alle x-waarden waarvoor geldt dat x groter is dan 5/3 is $y = 5x + 2$ groter dan $y = 2x + 7$. In de volgende grafiek wordt dit met behulp van de arcering aanschouwelijk gemaakt.

Figuur 8



Voorbeeld 5

Los op:

$2x + 6 \leq 5x – 3$

Op gelijke wijze als in het vorige voorbeeld brengen we 5x naar links van het kleiner/gelijk-teken en 6 naar rechts:

$2x - 5x \leq -3 - 6$

En we vinden

$-3x \leq -9$

We passen de volgende regel toe bij het werken met ongelijkheden:

Regel 3

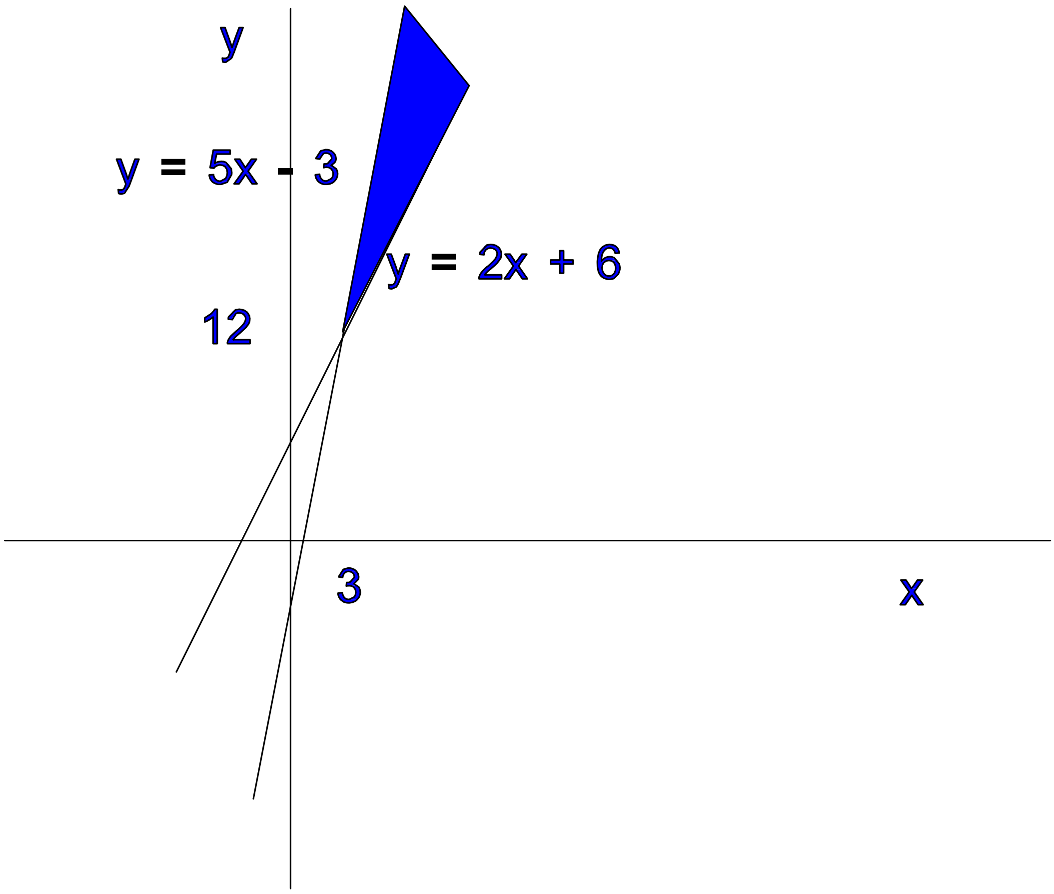
Delen door een positief getal bij een ongelijkheid laat het ongelijkheidsteken ongemoeid
Delen door een negatief getal bij een ongelijkheid laat het ongelijkheidsteken omdraaien

Als we deze regel toepassen dan zien we dat we in voorbeeld 4 geluk hebben gehad: we deelden door een positief getal en hoefden het teken niet te veranderen. In dit voorbeeld echter moeten we om de oplossing te bepalen delen door –3, een negatief getal. We moeten bij het delen het teken omdraaien:

$-3x \leq -9$ delen door –3 wordt

$x \geq 3$.

Figuur 9



We zien dat het teken omgeklapt is. Klaarblijkelijk is voor alle x-waarden die groter of gelijk zijn dan 3 het zo dat $2x + 6 \leq 5x - 3$. In het figuur wordt dit door de arcering aangegeven.

We hebben door het omdraaien van het ongelijkheidsteken de correcte oplossing gevonden. Onthoud goed dat delen door een negatieve waarde bij een ongelijkheid zorgt voor tekenverandering!

7.9 Een lineair verband opstellen

Al eerder hebben we opgemerkt dat twee punten in een vlak voldoende zijn om een lijn te trekken. Met deze twee punten moeten we derhalve in staat zijn om een lineair verband op te stellen.

Voorbeeld 6

Kijken we naar de punten (2, 1) en (3, 5). We gaan de gedaante van het lineair verband bepalen dat door deze twee punten loopt. Allereerst merken we op dat de algemene gedaante $y = ax + b$ is. Om tot een oplossing te komen zijn er twee manieren:

I We vullen de gegeven punten in de algemene gedaante in:

$y = ax + b$ geeft

$5 = 3a + b$
$1 = 2a + b$

We zetten hier een streep onder en we halen beide vergelijkingen van elkaar af:

$$\begin{array}{l} 5 = 3a + b \\ \underline{1 = 2a + b -} \\ 4 = \quad a \end{array}$$

We vinden $a = 4$ en vullen deze in bijvoorbeeld de tweede vergelijking in:

$1 = 2a + b$ wordt
$1 = 2.4 + b$ dus
$1 = 8 + b$

En daaruit volgt als we 8 naar links plaatsen zodat we link $1 – 8 = -7$ krijgen, dat $b = -7$. De gedaante van het lineaire verband dat we zoeken, luidt $y = 4x – 7$.

II We gebruiken de definitie van de richtingscoëfficiënt. Bij de punten (2, 1) en (3, 5) geldt:

$\Delta x = 3 – 2 = 1$
$\Delta y = 5 – 1 = 4$

Dus $a = \Delta y/\Delta x = 4/1 = 4$.

We hebben $y = 4x + b$. Invullen van bijvoorbeeld (2, 1) geeft dat

$y = 4x + b$ dan wordt

$1 = 4.2 + b$

Hier volgt dan uit dat $b = -7$. Ook nu vinden we de gedaante $y = 4x – 7$.

7.10 Twee vergelijkingen met twee onbekenden

We hebben in de vorige paragraaf bij de eerste oplosmethode gezien hoe een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden werd opgelost. Omdat we direct de twee vergelijkingen van elkaar kunnen afhalen, is het niet zo moeilijk om de eerste onbekende uit te rekenen. Maar het is niet altijd direct mogelijk om de vergelijkingen van elkaar af te halen. Daartoe moeten we eerst een tussenstap maken. We lichten een en ander tot met een voorbeeld.

Voorbeeld 7

Gegeven zijn de volgende twee vergelijkingen:

$7x + 6y = 32$
$2x + 4y = 16$

Zoals net opgemerkt kan men zien dat het niet zo zinvol is om de twee vergelijkingen van elkaar af te halen, immers dan vinden we $5x + 2y = 16$ en daar kunnen we eigenlijk niets mee doen. De bedoeling is dat na het van elkaar afhalen er een variabele verdwijnt zodat er nog maar eentje blijft in de vergelijking. Om dit te bewerkstelligen passen we een tussenstap toe:

- we fixeren ons op een variabele x of y. Welke, dat maakt niets uit.
- we kiezen bijvoorbeeld voor y.
- we vermenigvuldigen beide vergelijkingen dusdanig dat we bij de coëfficiënten van y uitkomen op het kleinst gemene veelvoud. Omdat de coëfficiënten van y gelijk zijn aan 4 en 6, is het kleinst gemene veelvoud 12.
- we vermenigvuldigen de eerste vergelijking met 2 en de tweede vergelijking met 3:

$7x + 6y = 32 \quad | * 2|$
$2x + 4y = 16 \quad | * 3|$

levert op

$14x + 12y = 64$
$6x + 12y = 48$

Nu kunnen we beide vergelijkingen van elkaar af halen omdat de y-variabele er dan uit valt:

$$\begin{array}{l} 14x + 12y = 64 \\ \underline{6x+12y=48\ -} \\ 8x \qquad\quad = 16 \end{array}$$

waaruit volgt dat $x = 2$. Deze vullen we in bij bijvoorbeeld

$2x + 4y = 16$

en dan krijgen we

$2.2 + 4y = 16$

levert op

$4 + 4y = 16$

ofwel

$4y = 16 – 4 = 12$,

dus $y = 3$.

De oplossing is gelijk aan $x = 2$ en $y = 3$.

Een praktische vraag is wat we hier nu berekend hebben. Meestal worden vergelijkingen opgesteld vanuit een economische context en zijn dan heel logisch te begrijpen. Oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden komt wiskundig overeen met het berekenen van een snijpunt van twee lijnen. Om dit inzichtelijk te maken kijken we naar

$2x + 4y = 16$.

Dit is te herschrijven als

$4y = -2x + 16$ ofwel na delen door 4

$y = -1/2x + 4$

In de laatste uitdrukking ziet u de bekende gedaante van een lineair verband en kan herkend worden dat we met een lijn te maken hebben. We noemen de laatste uitdrukking de *expliciete gedaante van een lineair verband*. De uitdrukking $2x + 4y = 16$ bevat dezelfde informatie, maar is alleen anders opgeschreven. Dit wordt wel de *impliciete gedaante van een lineair verband* genoemd.

Regel 4
De algemene gedaante $y = ax + b$ noemen we de *expliciete gedaante* van een lineair verband;
de algemene gedaante $ax + by = c$ noemen we de *impliciete gedaante* van een lineair verband

Analoog aan het eerste impliciete verband kan $7x + 6y = 32$ omgeschreven worden naar een expliciete gedaante. Belangrijk is dat beide impliciete vergelijkingen overeenkomen met twee lijnen. Oplossen van het stelstel betekent daarom dat we het snijpunt berekenen van de twee lijnen. Immers, voor beide vergelijkingen geldt dat $x = 2$ en $y = 3$ een oplossing is. En dat kan alleen maar bij het snijpunt van toepassing zijn.

7.11 Oplossing van het probleem in de Case

Richten we ons na deze theorie op de case. We werken het probleem uit aan de hand van een stappenplan. Zo kunt u zien wat er dient te gebeuren en in welke fase van de uitwerking we zijn:

I Vertalen van tekst naar wiskundige notatie
II Bepalen van afhankelijke en onafhankelijke variabele
III Opstellen van lineaire verbanden van vraag en aanbod
IV Aanbodoverschot bepalen met financiële consequentie
V Tekenen van de lineaire verbanden in één grafiek

I <u>Vertalenvantekstnaarwiskundigenotatie</u>

In het algemeen wordt in een case niet op een wiskundige wijze vertelt wat er moet gebeuren. De vertaalslag naar wiskunde moet als eerste gemaakt worden. Laten we eens naar enige informatie uit de case kijken:

Vraag

- bij een prijs van 40 euro per ton is de vraag 7 miljoen ton per week
- bij een prijs van 60 euro per ton is de vraag 5 miljoen ton per week

Aanbod

- bij een prijs van 30 euro per ton is het aanbod 3 miljoen ton per week
- bij een prijs van 50 euro per ton is het aanbod 7 miljoen ton per week

De informatie is textueel, we zetten hem om naar notatie. In de wiskundige theorie wordt er als er met variabelen wordt gewerkt, meestal met x en y gerekend. In een economische context zijn er vaak vaste notaties voor variabelen. Zo is de notatie voor de prijs p en voor de afzet q. Dat er voor de prijs de variabele p wordt gebruikt, zal geen verbazing zijn. De q komt van het Engelse quantity en is in Nederlandse termen minder logisch:

p staat voor de prijs
q staat voor de afzet

Daarna kijken we naar de eenheid van prijs. Bedragen die genoemd worden zijn 30, 40, 50 en 60 euro per ton. In principe zouden we dit zo kunnen gebruiken in het vervolg. Maar het is veel eenvoudiger om in plaats van de eenheid euro per ton te werken met de eenheid 10 euro per ton. Gekoppeld aan de notatieafspraak krijgen we dat $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$ en $p = 6$.

Als we op analoge manier naar de afzet kijken, dan ligt het voor de hand om te gaan werken met de eenheid miljoen ton per week. Op deze manier wordt $q = 3$, $q = 5$ en $q = 7$ veel makkelijker om te gaan werken.

Maken we de vertaalslag overzichtelijk:

Vraag

- bij p = 4 is q = 7
- bij p = 6 is q = 5

Aanbod

- bij p = 3 is q = 3
- bij p = 5 is q = 7

Waarbij p in 10 euro per ton en q in miljoenen ton per week.

II Bepalenvanafhankelijkeenonafhankelijkevariabele

Een opmerking in de case die belangrijk is, is dat het verband tussen p en q lineair verondersteld wordt. Om hier iets mee te kunnen doen, moeten we weten welke variabele de afhankelijke variabele is en welke de onafhankelijke. In het algemeen zijn de vraag en het aanbod afhankelijk van een bepaalde prijsstelling.

De prijs is de onafhankelijke variabele,
de vraag en het aanbod zijn afhankelijke variabelen.

III Opstellenlineaireverbandenvanvraagenaanbod

Nu kunnen we de algemene gedaante opstellen van een lineaire vergelijking:

$q = ap + b$

Door geen x en y te gebruiken zult u even moeten wennen aan deze gedaante.

We gaan aan de slag om zowel voor de vraag als voor het aanbod een lineair verband op te stellen. We beginnen met de vraag.

Vraag

- bij p = 4 is q = 7
- bij p = 6 is q = 5

vullen we in de algemene gedaante $q = ap + b$ in:

$q = ap + b$ geeft

$7 = 4a + b$
$5 = 6a + b$

We lossen dit stelsel op door beide vergelijkingen van elkaar af te halen:

$7 = 4a + b$
$\underline{5= 6a+b\ -}$
$2 = -2a$

Hieruit volgt dat **a = -1**. Invullen in bijvoorbeeld

$7 = 4a + b$ geeft

$7 = 4.-1 + b$ ofwel $7 = -4 + b$, dus **b = 11**

Het lineaire verband tussen vraag en prijs luidt:

$q = -p + 11$.

Aanbod

- bij $p = 3$ is $q = 3$
- bij $p = 5$ is $q = 7$

vullen we in de algemene gedaante in:

$q = ap + b$ levert op

$3= 3a + b$
$7= 5a + b$

We zetten er een streep onder en halen beide vergelijkingen van elkaar af:

$$\begin{array}{l} 3 = 3a + b \\ \underline{7 = 5a + b\ -} \\ -4 = -2a \end{array}$$

Delen door –2 geeft **a = 2**. Invullen in bijvoorbeeld

$3 = 3a + b$

levert op $3 = 3.2 + b$, ofwel $3 = 6 + b$. We vinden dan **b = -3**.

Het lineaire verband tussen aanbod en prijs is:

$q = 2p – 3$

IV Aanbodoverschotbepalenmetfinanciëleconsequentie

In de case wordt genoemd dat de minimumprijs ingesteld wordt op 50 euro per ton. We vullen $p = 5$ in om te kijken hoe groot het aanbod is en hoe groot de vraag:

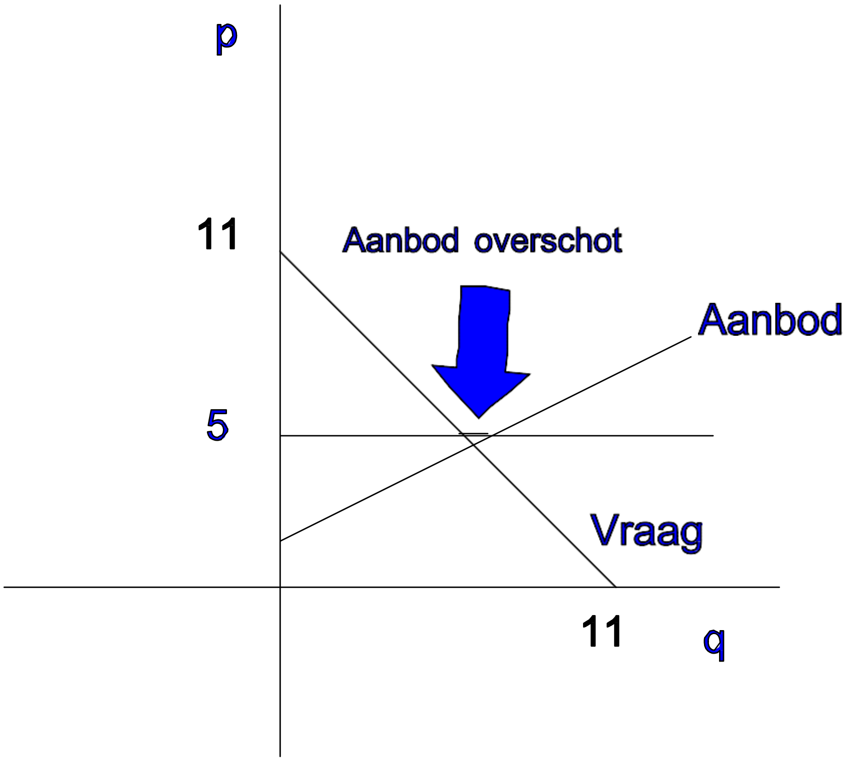
Aanbod: $q = 2p – 3$ wordt $q = 2.5 – 3 = 7$.
Vraag: $q = -p + 11$ wordt $q = -5 + 11 = 6$.

Er wordt 7 miljoen ton per week aangeboden en 6 miljoen ton per week gevraagd. Het aanbodoverschot is dus 1 miljoen ton per week. Dit wordt opgekocht tegen de minimumprijs van 50 euro per ton. De financiële consequentie is 50 miljoen euro per week!

V Tekenenvandelineaireverbandeninééngrafiek

Bij deze case is het tekenen van beide grafieken heel eenvoudig. Dat komt omdat van beide lineaire verbanden twee punten in het vlak gegeven worden. Hierdoor trekken we een lijn waarbij we rekening houden met het feit dat p en q niet-negatief mogen zijn.

Figuur 10



Door tevens in de grafiek een horizontale lijn te trekken bij p = 5 kunnen we het aanbodoverschot herkennen als het verschil tussen de grafieken van aanbod en vraag.

7.12 Samenvatting

Regel 1
De algemene gedaante van een lineair verband luidt $y = ax + b$

- a is hierin de *richtingscoëfficiënt*
- b is de *constante*

Regel 2
De definitie van de richtingscoëfficiënt is $a = \Delta y/\Delta x$

- $a > 0$ dan is het lineair verband stijgend en met $a < 0$ is het lineair verband dalend
- $a = 0$ is er sprake van een constante

Regel 3
Bij een ongelijkheid klapt het teken om als er gedeeld wordt door een negatief getal; delen door een positief getal laat het teken ongemoeid

Regel 4
De algemene gedaante $y = ax + b$ noemen we de *expliciete gedaante* van een lineair verband
De algemene gedaante $ax + by = c$ noemen we de *impliciete gedaante* van een lineair verband

7.13 Basisopgaven

In deze paragraaf volgen basisopgaven die allereerst geoefend dienen te worden voordat er begonnen kan worden met de toegepaste opgaven van de volgende paragraaf.

Opgave 1

Teken de grafiek van:

a. $y = 3x - 2$
b. $y = -4x + 1$

Opgave 2

Geef in onderstaande lineaire verbanden aan welke waarde de richtingcoëfficiënt heeft en welke waarde de constante:

a. $y = -x + 7$
b. $y = 5x$
c. $3x + 3y = 6$
d. $7x - 2y = 9$

Opgave 3

Bepaal het snijpunt met de x-as en de y-as:

a. $y = 12x - 24$
b. $y = -2x - 5$
c. $5x - 4y = 1$
d. $7x + 6y = 3$

Opgave 4

Bepaal de coördinaten van het snijpunt van de volgende lineaire verbanden:

a. $y = 3x + 2$ en $y = 6x - 3$
b. $y = 2x - 1$ en $y = 3x + 5$
c. $y = x + 10$ en $y = -2x + 7$
d. $y = 4x + 5$ en $y = -3x - 6$

Opgave 5

Stel het lineaire verband op dat door de volgende twee punten in het vlak gaat:

a. (1, 3) en (3, 7)
b. (0, 0) en (6, -1)
c. (-2, -2) en (3, -4)
d. (-1, -2) en (-6, 8)

Opgave 6

Los onderstaande stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden op:

a. $2x + 3y = 5$
$3x + y = 7$

b. $5x - 2y = -2$
$-3x + 4y = 8$

c. $7x - 7y = 9$
$-3x - 5y = 12$

d. $-12x + 15y = 6$
$-5x + 7y = 20$

7.14 Toegepaste Opgaven

In deze paragraaf volgen toegepaste opgaven. Hierin komen ook andere problemen voor dan aangereikt in de case. Als tip geldt dat men allereerst de gegeven tekst dient om te zetten naar wiskundige notatie en dan moet proberen om het probleem op te lossen. Dus

- schrijf de opgave in wiskundige notatie op
- probeer dan het probleem te herkennen als een basisopgave.

Opgave 1

Voor een winkel in groente en fruit geldt het volgende:

Bij inkoop van 6 kilogram kiwi's bedragen de totale kosten 69 euro's per maand,
bij inkoop van 9 kilogram kiwi's bedragen de totale kosten 77euro's per maand.

Veronderstel een lineair verband tussen de totale kosten per maand en de hoeveelheid kiwi's per maand.

Hoe luidt de totale kostenfunctie per maand?

Opgave 2

Voor een totale kostenfunctie geldt:

$TK = 20 + 12q$

Voor een opbrengstfunctie geldt:

$TO = 32q$.

Hierbij zijn TO en TK uitgedrukt in 1.000 euro's per dag, q is in 10 stuks per dag en q is niet-negatief.

a. Teken TO en TK in 1 grafiek.

b. Bereken het break-even-punt.

Opgave 3

Voor een winkel in diverse kaassoorten geldt

voor Brie: de verkoopprijs bedraagt 12 euro per kilogram
voor Brousson: de verkoopprijs bedraagt 10 euro per kilogram

Ten aanzien van de totale kosten geldt

voor Brie: $TK = 27 + 5q$
voor Brousson: $TK = 23 + 4q$

Waarbij q uitgedrukt is in kilogram per maand en
TK uitgedrukt in euro's per maand.

Welke kaassoort heeft de grootste winst bij verkoop van 20 kilogram kaas van beide soorten?

Opgave 4

De verkoopprijs van een kilogram jam is 11 euro. De vaste kosten per week bedragen 25 euro’s voor jam en de variabele kosten voor jam bedragen 4 euro’s per kilogram. Veronderstel het verband tussen kosten en hoeveelheid lineair.

Bereken het break-even punt.

Opgave 5

Voor een slagerij met diverse vleessoorten geldt

voor cornedbeef: de verkoopprijs bedraagt 14 euro per kilogram
voor rollade: de verkoopprijs bedraagt 12 euro per kilogram

Ten aanzien van de totale kosten geldt

voor cornedbeef: $TK = 18 + 5q$
voor rollade: $TK = 23 + 4q$

Waarbij q uitgedrukt is in kilogram per maand en niet-negatief,
TK uitgedrukt in euro’s per maand.

Welk vleessoort heeft de kleinste winst bij verkoop van 18 kilogram per maand van beide soorten?

Opgave 6

Op een markt van volledige mededinging geldt:

De aanbodfunctie is

$q = p + 6$

De vraagfunctie is

$q = -0{,}5p + 18$

met p de prijs in 100 euro per ton en niet-negatief;
en q is uitgedrukt in 100.000 kilogram per maand en niet-negatief.

a. Wat is het evenwichtspunt?

b. Hoe groot is het aanbodoverschot als er een minimumprijs is van 1.000 euro per ton?

c. Hoe groot is hierbij de financiële consequentie als het overschot tegen de minimumprijs wordt opgekocht?

d. Teken vraag- en aanbodfunctie in 1 grafiek. Geef hierin het aanbodoverschot aan.

e. Hoe groot is het vraagoverschot als de maximumprijs op 700 euro per ton wordt gesteld? Geef het vraagoverschot aan in de grafiek.

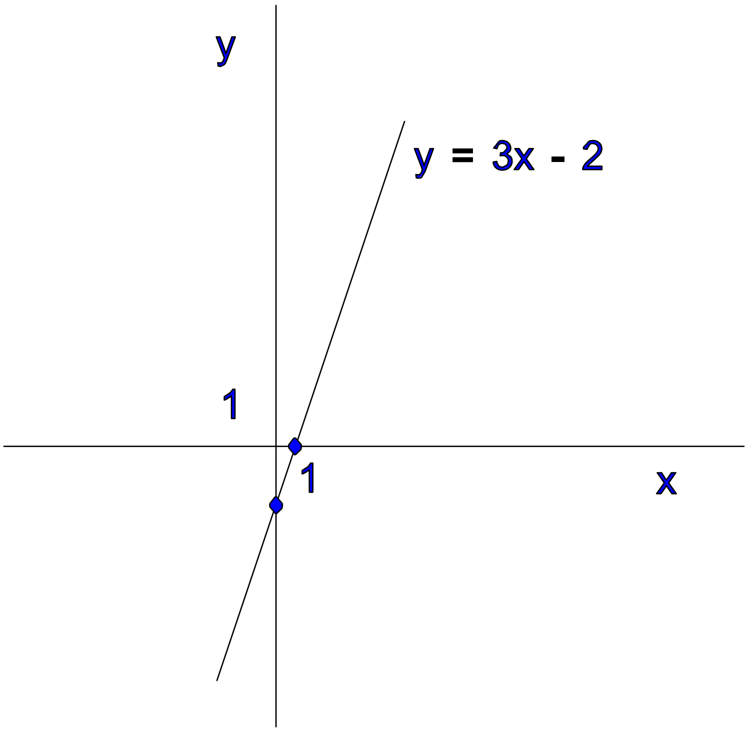
Uitwerkingen Basisopgaven H7

Opgave 1

a. Gevraagd wordt om y = 3x – 2 te tekenen. Een manier om dit te doen is het berekenen van snijpunten met x-as en y-as:

- Snijpunt y-as: x = 0 invullen geeft y = 3.0 – 2 = -2. We vinden (0, -2).
- Snijpunt x-as: y = 0 levert op 3x – 2 = 0, dus 3x = 2 ofwel x = 2/3. We vinden (2/3, 0).

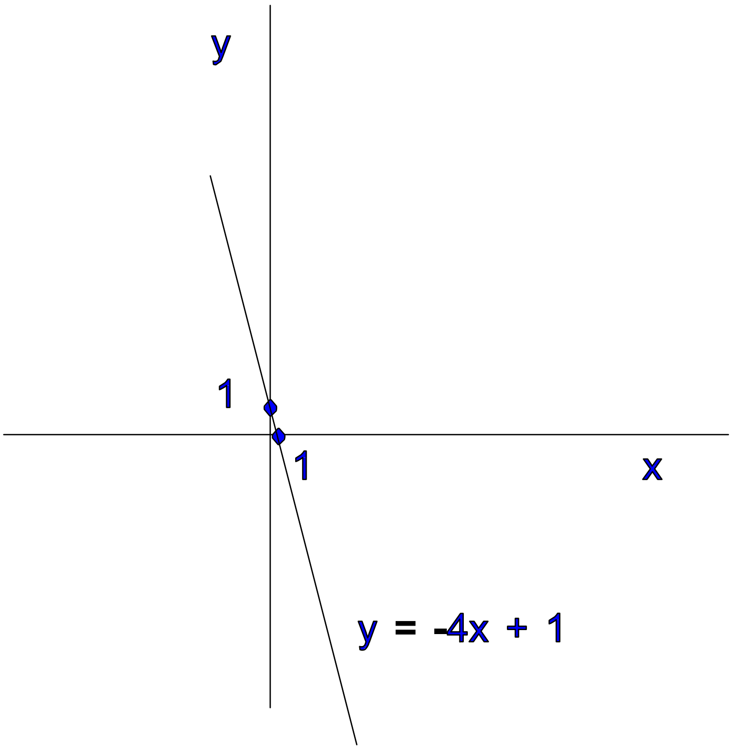
Figuur 11



b. We gaan y = -4x + 1 tekenen. Daartoe berekenen we het snijpunt met de x-as en de y-as:

- Snijpunt y-as: x = 0 invullen geeft y = -4.0 + 1 = 1. We vinden (0, 1).
- Snijpunt x-as: y = 0 invullen geeft –4x + 1 = 0, dus –4x = -1 ofwel x = ¼.
  We vinden (1/4, 0).

Figuur 12



Opgave 2

a. y = -x + 7 = -1.x + 7, dan zijn a = -1 en b = 7.

b. y = 5x = 5x + 0 , dus a = 5 en b = 0.

c. 3x + 3y = 6 is een impliciete vorm welke we herschrijven naar de expliciete vorm: 3x + 3y = 6 is hetzelfde als 3y = -3x + 6. Delen door 3 levert op y = -x + 2. We vinden a = -1 en b = 2.

d. 7x –2y herschrijven we naar –2y = -7x + 9. Delen door –2 geeft y = 3,5x –4,5. Dat betekent dat a = 3,5 en b = -4,5.

Opgave 3

a. y = 12x –24, hiervan berekenen we de snijpunten met de y-as en de x-as:

Snijpunt y-as: x = 0, y = 12.0 – 24 = -24 levert op (0, -24);
snijpunt x-as: y = 0, 12x – 24 = 0, 12x = 24, x = 2 levert op (2,0).

b. y = -2x – 5, hiervan berekenen we de snijpunten met de y-as en de x-as:

Snijpunt y-as: x = 0, y = -2.0 – 5 = -5, dus (0, -5);
snijpunt x-as: y = 0, -2x - 5 = 0, -2x = 5 delen we door –2, x = -2,5 levert op (-2,5; 0).

c. $5x - 4y = 1$ is impliciet, maar hierin vullen we direct $x = 0$ en $y = 0$ in:

Snijpunt y-as: $x = 0$, $5.0 - 4y = 1$, ofwel $-4y = 1$ delen we door -4, $y = -1/4$ en we vinden het punt $(0, -1/4)$;
snijpunt x –as: $y = 0$, $5x - 4.0 = 1$, dus $5x = 1$ ofwel $x = 1/5$ met het punt $(1/5, 0)$.

d. $7x + 6y = 3$

Snijpunt y-as: $x = 0$, $7.0 + 6y = 3$, dus $6y = 3$ geeft $y = ½$ met het punt $(0, 1/2)$;
snijpunt x-as: $y = 0$, $7x + 6.0 = 3$, dus $7x = 3$ geeft $x = 3/7$, dus $(3/7, 0)$.

Opgave 4

a. $3x + 2 = 6x - 3$,
$3x - 6x = -3 - 2$, dus
$-3x = -5$, delen door -3 geeft
$x = 5/3$.

Deze vullen we in bij bv. $y = 3x + 2$, dus $y = 3.\ 5/3 + 2 = 5 + 2 = 7$.
Het snijpunt is $(1\ 2/3, 7)$.

b. $2x - 1 = 3x + 5$,
$2x - 3x = 5 + 1$, dus
$-x = 6$ vermenigvuldigen met -1 geeft
$x = -6$.

Invullen in bijvoorbeeld $y = 2x - 1$ geeft $y = 2.-6 - 1 = -13$. Het snijpunt is $(-6, -13)$.

c. $x + 10 = -2x + 7$,
$x + 2x = 7 - 10$ ofwel
$3x = -3$ delen we door 3 en we vinden
$x = -1$.

Invullen in bijvoorbeeld $y = x + 10$ geeft $y = -1 + 10 = 9$. Het snijpunt is $(-1, 9)$.

d. $4x + 5 = -3x - 6$,
$4x + 3x = -6 - 5$, dus
$7x = -11$ delen we door 7 en we vinden
$x = -11/7 = -1\ 4/7$.

Invullen in bijvoorbeeld $y = 4x + 5$ geeft $y = 4.\ -11/7 + 5 = -44/7 + 35/7 = -9/7 = -1\ 2/7$.
Het snijpunt is $(-1\ 4/7, -1\ 2/7)$.

Opgave 5

a. $(1, 3)$ en $(3, 7)$ vullen we in bij de algemene gedaante $y = ax + b$:

$$\begin{array}{l} 3 = a.1 + b = \quad a + b \\ \underline{7 = a.3 + b = 3a + b -} \\ -4 = -2a \end{array}$$

Delen door –2 levert op a = 2. Invullen in bijvoorbeeld 3 = a + b geeft 3 = 2 + b, dus b = 1. Het lineair verband is **y = 2x + 1**.

b. (0, 0) en (6, -1) vullen we in bij de algemene gedaante y = ax + b:

 0 = a.0 + b =   b
-1 = a.6 + b = 6a + b

We zien dat b = 0. Deze vullen we in bij –1 = 6a + b en dat wordt –1 = 6a + 0 = 6a. Delen door 6 geeft a = -1/6. Het lineair verband is **y = -1/6.x**.

c. (-2, -2) vullen we in bij de algemene gedaante y = ax + b:

-2 = a.-2 + b = -2a + b
<u>-4=a.3+b =   3a+b-</u>
 2 = -5a

Delen door –5 geeft a = -2/5. Invullen in bijv. –2 = -2a + b geeft –2 = -2.-2/5 + b, ofwel –2 = 4/5 + b, dus –2 4/5 = b. Het lineair verband is **y = -2/5.x –2 4/5**.

d. (-1, -2) en (-6, 8) vullen we in bij y = ax + b:

  -2 = a.-1 + b =   -a + b
      <u>8 =a.-6+b = -6a+b-</u>
 -10 = 5a

Delen door 5 geeft a = -2. Invullen in bijvoorbeeld –2 = -a + b geeft –2 = 2 + b, dus b = -4. Het lineair verband is **y = -2x – 4**.

Opgave 6

a. We vermenigvuldigen de eerste vergelijking met 1 en de tweede vergelijking met 3:

2x + 3y = 5 | 1| wordt	2x + 3y = 5
3x + y = 7 | 3| wordt	<u>9x+3y= 21-</u>
	-7x = -16

Delen door –7 geeft x = 16/7 = 2 2/7. Invullen in bijvoorbeeld 2x + 3y = 5 geeft 2.16/7 + 3y = 5, dus 32/7 + 3y = 5, ofwel 3y = 35/7 – 32/7 = 3/7. Delen door 3 geeft y = 1/7.

De oplossing is **x = 2 2/7 en y = 1/7**.

b. We vermenigvuldigen de eerste vergelijking met 2 en de tweede vergelijking met 1:

5x - 2y = -2 | 2| wordt	10x - 4y = -4
-3x + 4y = 8 | 1| wordt	<u>-3x+ 4y= 8+</u>
	7x = 4

Delen door 7 geeft x = 4/7. Invullen in bijvoorbeeld -3x + 4y = 8 geeft -3.4/7 + 4y = 8, dus –12/7 + 4y = 8, ofwel 4y = 56/7 + 12/7 = 68/7. Delen door 4 geeft y = 17/7 = 2 3/7.

De oplossing is **x = 4/7 en y = 2 3/7**.

c. We vermenigvuldigen de eerste vergelijking met 3 en de tweede vergelijking met 7:

7x - 7y = 9 | 3| wordt	21x - 21y = 27	
-3x - 5y = 12 | 7| wordt	-21x-35y= 84+	
	-56y = 111	

Delen door –56 geeft y = -111/56 = -1 55/56. Invullen in bijvoorbeeld 7x - 7y = 9 geeft 7x – 7.-111/56 = 9, dus 7x + 777/56 = 9, ofwel 7x = 9 – 777/56 = 504/56 – 777/56 =-273/56. Delen door 7 geeft x = -39/56.

De oplossing is **x = -39/56 en y = -1 55/56**.

d. Voordat we op analoge wijze als bij de vorige onderdelen gaan rekenen, vereenvoudigen we allereerst de eerste vergelijking –12x + 15y = 6. We kunnen namelijk door 3 en vinden dan –4x + 5y = 2.

We vermenigvuldigen hierna de eerste vergelijking met 5 en de tweede vergelijking met 4:

-4x + 5y = 2 | 5| wordt	-20x + 25y = 10	
-5x + 7y = 20 | 3| wordt	-20x+28y= 80-	
	-3y = -70	

Delen door –3 geeft y = -70/-3 = 70/3 = 23 1/3. Invullen in bijvoorbeeld -4x + 5y = 2 geeft –4x + 5. 70/3 = 2, dus –4x + 350/3.y = 2, ofwel –4x = 6/3 – 350/3 = -344/3. Delen door -4 geeft x = 86/3 = 28 2/3..

De oplossing is **x = 28 2/3 en y = 23 1/3**.

Uitwerkingen Toegepaste Opgaven H7

Opgave 1

In wiskundige notatie is gegeven:

TK = 69, q = 6
TK = 77, q = 9

met TK in euro's per maand
en q in kilogram per maand.

De algemene gedaante van TK = aq + b gaan we invullen:

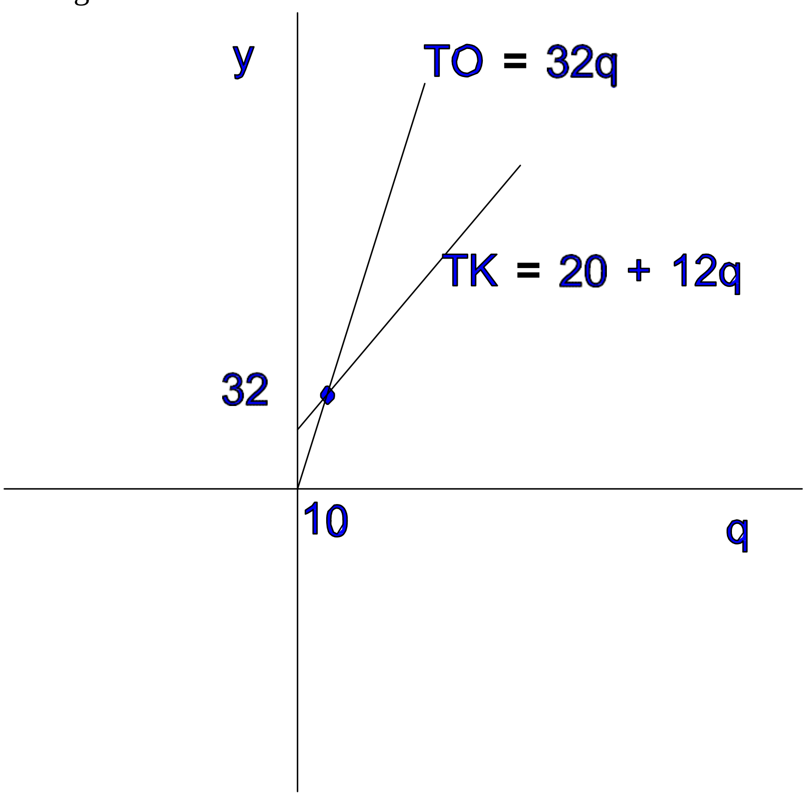
69 = a.6 + b = 6a + b
77=a.9+b=9a+b–
-8 = -3a

Delen door –3 levert op a = -8/-3 = 8/3 = 2 2/3. Invullen in bijvoorbeeld 69 = 6a + b geeft 69 = 6.8/3 + b, dus 69 = 48/3 + b = 16 + b. En we zien dat b = 69 – 16 = 53.

De Totale kosten per maand zijn **TK = 2 2/3.q + 53**.

Opgave 2

a. Figuur 13



b. TO = TK bij een break-even punt. Dat betekent hier het oplossen van:
   32q = 20 + 12q, dus
   20q = 20.

   Delen door 20 levert op q = 1. Invullen in TO of TK geeft TO= TK = 32.

   Het break-even punt is een afzet van 10 stuks per dag met een totale ontvangst en totale kosten van 32.000 euro's per dag.

Opgave 3

Allereerst bereken we de winst voor Brie:

TO = 12q
TK = 27 + 5q, dus
TW = TO – TK = 12q – (27 + 5q) = 12q – 27 – 5q = 7q – 27.

Invullen van q = 20 levert op: TW = 7. 20 – 27 = 113. Bij 20 kilo per maand is de totale winst 113 euro.

Daarna voor Brousson:

TO = 10q
TK = 23 + 4q, dus
TW = TO – TK = 10q – (23 + 4q) = 10q – 23 – 4q = 6q – 23.

Invullen van q = 20 geeft: TW = 6.20 – 23 = 120 – 23 = 97. Bij 20 kilo per maand is de totale winst gelijk aan 97 euro.

Conclusie: Brie heeft de grootste winst.

Opgave 4

Uit de tekst van de opgave blijkt dat

TO = 11q en
TK = 4q + 25

met TO en TK in euro's per week
en q in kilogram per week.

We vinden het break-even punt als TO = TK, dus

11q = 4q + 25, ofwel
7q = 25

Delen door 7 geeft q = 25/7 = 3 4/7 kilogram per week. Invullen in TO en TK geeft 39 2/7 euro's per week.

Opgave 5

Allereerst kijken we naar cornedbeef:

TO = 14q en
TK = 18 + 5q, dus
TW = TO – TK = 14q – (18 + 5q) = 14q – 18 – 5q = 9q – 18

Invullen van q = 18 levert op TW = 9.18 – 18 = 144, dus bij 18 kilogram per maand aan cornedbeef hoort 144 euro’s winst.

Vervolgens aanschouwen we rollade:

TO = 12q en
TK = 23 + 4q dus
TW = TO – TK = 12q – (23 + 4q) = 8q – 23

Invullen van q = 18 geeft TW = 8.18 – 23 = 121, dus bij 18 kilogram rollade per maand hoort een winst van 121 euro’s.

Conclusie: De winst voor rollade is kleiner dan die voor cornedbeef.

Opgave 6

a. We vinden het evenwichtspunt door vraag en aanbod aan elkaar gelijk te stellen:

   p + 6 = -0,5p + 18, dus
   1,5p = 12

   Delen door 1,5 geeft p = 8.

   Invullen in bijvoorbeeld q = p + 6 levert op q = 8 + 6 = 14.

   Het evenwichtspunt worden bereikt bij een prijs van 800 euro per ton en een hoeveelheid van 1.400 ton per maand.

b. Het aanbodoverschot wordt berekend door te kijken hoe groot het aanbod is en dit te vergelijken met de vraag. Het verschil is het aanbodoverschot:

   p = 10 invullen in q = p + 6 geeft q = 10 + 6 = 16,
   p = 10 invullen in q = -0,5p + 18 geeft q = -0,5.10 + 18 = 13

   Het aanbodoverschot bedraagt 1.600.000 – 1.300.000 = 300.000 kilogram per maand ofwel 300 ton per maand.

c. De financiële consequentie is 300 * 1.000 = 300.000 euro’s per maand.

d. Voor het tekenen van het aanbod gebruiken we bijvoorbeeld de punten:

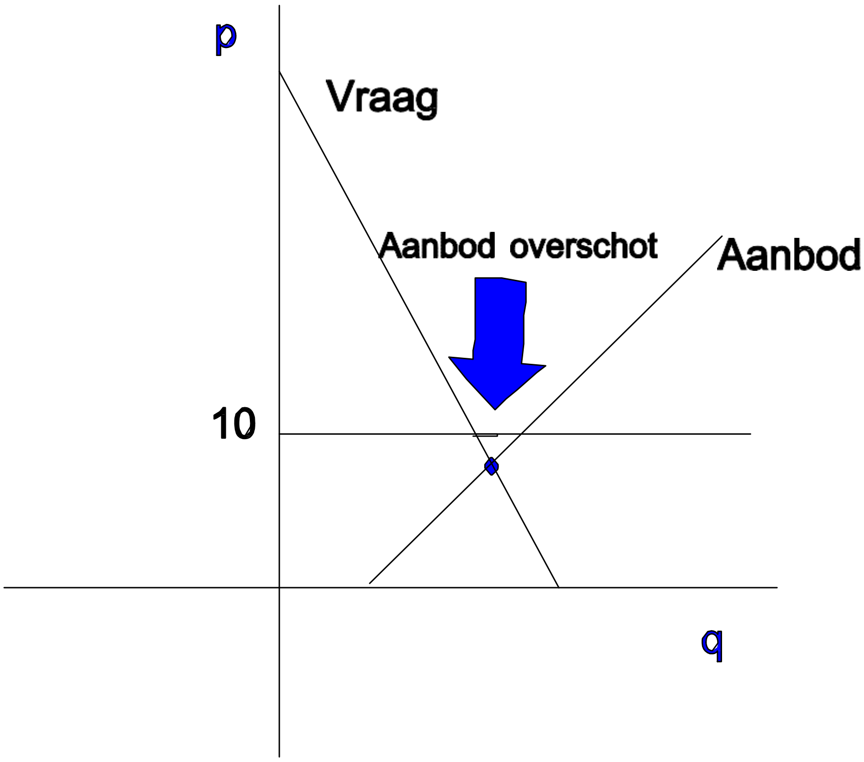
p = 0, q = 6 en
p = 8, q = 14;

voor het tekenen van de vraag kunnen we bijvoorbeeld gebruik maken van de punten:

p = 0, q = 18 en
p = 8, q = 14.

We vinden visueel het aanbodoverschot door bij p = 10 een horizontale lijn te trekken en dan het verschil tussen vraag en aanbod dik te arceren.

Figuur 14

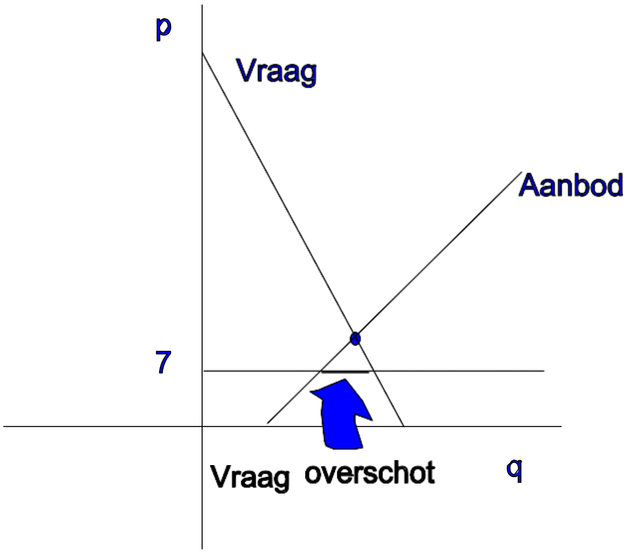


e. Het vraagoverschot wordt, net als het aanbodoverschot, berekend door te kijken hoe groot het aanbod is en dit te vergelijken met de vraag. Het verschil is in dit geval het vraagoverschot:

p = 7 invullen in q = p + 6 geeft q = 7 + 6 = 13,
p = 7 invullen in q = -0,5.7 + 18 geeft q = -3,5 + 18 = 14,5

Het vraagoverschot bedraagt 1.450.000 – 1.300.000 = 150.000 kilogram per maand ofwel 150 ton per maand. In de grafiek is bij p = 7 een horizontale lijn getrokken. Het verschil tussen vraag en aanbod is aangeduid door de dikke arcering.

Figuur 15



Hoofdstuk 8 Machten en Wortels/ Financiële Rekenkunde

8.1 Inleiding en leerdoelen

Inleiding

Voor een econoom is het belangrijk om met de begrippen slotwaarde en contante waarde vertrouwd te zijn. Toepassing hiervan vindt plaats binnen bedrijfseconomie. Het wiskundige karakter van deze materie vindt zijn oorsprong in machten en wortels. Andere toepassingen van machten en wortels zijn bij marktonderzoek bijvoorbeeld het begrip foutmarge en bij algemene economie bijvoorbeeld Cobb-Douglas functies.

Vanuit de case wordt allereerst de theorie over machten en wortels gepresenteerd. Daarna wordt de economische toepassing gegeven om de case op te lossen. Met de basisopgaven, de toepassingsopgaven en de gecombineerde MC-vragen wordt de basis gelegd van training in financiële rekenkunde.

Leerdoelen

Kennis

- De student kent de notatie van machten en wortels
- De student weet de rekenregels van machten en wortels
- De student kent de begrippen contante waarde, slotwaarde en intrest
- De student weet wat periodieke betalingen en stortingen zijn

Vaardigheden

- de student kan werken met combinaties van rekenregels van machten en wortels
- de student is in staat om machten en wortels toe te passen in een economische context
- de student kan de contante waarde, de slotwaarde en de maandelijkse intrest berekenen
- de student is in staat om bij leningen uit te rekenen hoe groot de periodieke betalingen dienen te zijn
- de student kan het eindbedrag berekenen van een spaarplan bij gegeven periodieke stortingen

8.2 Case Spaarplan

Nadat Frederik afgestudeerd is in de marketing gaat hij werken in een grote internationale onderneming. Hij verdiept zich privé in de mogelijkheden die er zijn om te sparen. Bij overleg met een financieel adviseur wordt het volgende spaarplan aangereikt:

- *ieder spaarjaar dient hij aan het begin van dit jaar 600 euro te storten*
- *hier wordt 2% administratiekosten van af gehaald*
- *het spaarplan loopt na overleg 22 jaar lang*
- *het verwachte rendement ieder jaar bedraagt 7,2%*

Figuur 1

Frederik vraagt zich af hoe groot het verwachte eindbedrag zal zijn.

8.3 Machten

Om de vraag van Frederik te kunnen beantwoorden dienen we eerst te kijken naar de theorie van machten en wortels. In deze paragraaf wordt een aanvang gemaakt met machten.

Voorbeeld 1

Aanschouw de uitdrukking 5^3. Wat betekent dit? Iedereen weet dat dit 5.5.5 betekent. Je pakt een getal 5 en dit wordt drie keer met zichzelf vermenigvuldigd.

Maar wat betekent dat x^3? In plaats van een getal hebben we een variabele die we drie keer met zichzelf vermenigvuldigen: $x^3 = x.x.x$. In principe hebben we een formule ontwikkeld voor de uitspraak: neem een getal in je hoofd en vermenigvuldig dit drie keer met zich zelf.

Deze overweging leidt tot:

Regel 1

$x^n = x.x...x$ **,** waarbij x n maal genoemd dient te worden.

Hierin is x het grondtal en n de exponent of ook wel de macht. We praten over een exponentiële uitdrukking.

Wiskundigen zullen hierbij de tenen krommen omdat technisch gezien de formulering niet helemaal correct is. Maar omdat iedereen begrijpt wat we bedoelen, geven we de regel op deze manier.

Voorbeeld 2

Hoe kunnen we de volgende uitdrukking eenvoudiger opschrijven:

$$2^3.2^5$$

Hiertoe gebruiken we regel 1 en schrijven alles uit:

$2^3 = 2.2.2$
$2^5 = 2.2.2.2.2,$

maar dan is

$$2^3.2^5 = 2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^8$$

Het resultaat dat we vinden, kunnen we ook in woorden vertellen: als we 3 tweeën hebben die we met 5 tweeën vermenigvuldigen, dan vinden we in totaal 8 tweeën. Opvallend is dat we zien dat het grondtal niet verandert en dat de exponenten bij elkaar opgeteld worden.

Als we de 2 veranderen in een x dan vinden we analoog dat

$$x^3.x^5 = x^8 .$$

Dit zorgt voor de volgende rekenregel:

Regel 2

$x^n.x^m = x^{n+m}$

of in woorden: bij een vermenigvuldiging van twee exponentiële uitdrukkingen met gelijk

grondtal mogen we de machten bij elkaar optellen.

Voorbeeld 3
Hoe vereenvoudigen we de volgende breuk?

$$\frac{5^7}{5^3}$$

Om dit te begrijpen, schrijven we de teller en noemer helemaal uit:

$$\frac{5^7}{5^3} = \frac{5.5.5.5.5.5.5}{5.5.5} = 5.5.5.5 = 5^4$$

In woorden: eerst vermenigvuldigen we 7 maal met 5 en daarna delen we 3 maal door 5. Het eindresultaat is 4 maal vermenigvuldigen met 5. Als we goed kijken, dan zien we een wetmatigheid: we kunnen de exponenten 7 en 3 van elkaar af halen, immers 7 – 3 = 4. Dit leidt tot

Regel 3

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

of in woorden: bij delen van twee exponentiële uitdrukkingen met gelijk grondtal kunnen we de exponenten van elkaar af halen.

Toegepast op een exponentiële uitdrukking met als grondtal een variabele:

$$\frac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$$

Voorbeeld 4
Aanschouwen we de volgende uitdrukking;

$$(4^2)^3$$

De vraag is: waar is dit gelijk aan? We gebruiken de definitie van machten:

$$(4^2)^3 = 4^2.4^2.4^2 = 4.4.4.4.4.4 = 4^6$$

Als je goed kijkt, dan wordt bij deze uitdrukking een grondtal twee maal verheven tot een macht. Uit de berekening volgt dat het eindresultaat direct te vinden is door beide machten met elkaar te vermenigvuldigen.

Regel 4

$(x^n)^m = x^{n.m}$

In woorden: indien we een exponentiële uitdrukking verheffen tot een macht, dan mogen we het grondtal laten staan en beide machten met elkaar vermenigvuldigen.

Hieruit volgt bijvoorbeeld dat

$$(x^3)^5 = x^{3*5} = x^{15}$$

Tot nu toe hebben we positieve getallen gebruikt in de exponent, nu gaan we kijken wat de betekenis is van negatieve getallen als exponent.

Regel 5

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

In woorden: een grondtal verheven tot een negatieve macht betekent dat we moeten delen door de gegeven exponentiële uitdrukking.

Voorbeeld 5

Als we de vraag stellen: wat betekent

$$2^{-5}$$

dan volgt uit regel 5 dat

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

Of bijvoorbeeld

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Regel 6

$x^0 = 1$

of in woorden: een getal tot de macht 0 is gelijk aan 1.

Voorbeeld 6

Uit regel 6 volgt direct dat

$$2^0 = 1$$

8.4 Wortels

In deze paragraaf kijken we naar wortels. Allereerst vragen we ons af wat een (wiskundige) wortel is.

Voorbeeld 1

Wat betekent $\sqrt{4}$ of $\sqrt{9}$? Iedereen weet dat $\sqrt{4}$ gelijk is aan 2 en dat $\sqrt{9}$ gelijk is aan 3. Maar wat berekenen we?

$\sqrt{4}$ betekent dat we een getal zoeken als we dat met zichzelf vermenigvuldigen, dan komt er 4 uit; zo betekent $\sqrt{9}$ dat we een getal zoeken als we dat met zichzelf vermenigvuldigen dan komt er 9 uit. Zo is 2.2 = 4 en is 3.3 = 9.

Eigenlijk komt er volgens deze definitie dus ook –2 en –3 uit bij de gegeven wortels. Immers –2.-2 = 4 en –3.-3 = 9. Het kan natuurlijk niet zo zijn dat er twee uitkomsten uit een wortel kunnen komen. Stilzwijgend wordt aangenomen dat –2 en –3 niet voldoen voor praktische doeleinden.

De gegeven wortels zijn direct te bepalen omdat de gegeven waarden kwadraten zijn. Als we onder het wortelteken echter geen kwadraat plaatsen, dan hebben we de hulp van een rekenmachine nodig. We toetsen om bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ uit te rekenen de wortel en de 2 in en er volgt dat $\sqrt{2}$ = 1,4142….

Bij wortels kennen we de hogere machtswortels. Wat wordt hiermee bedoeld?

Voorbeeld 2

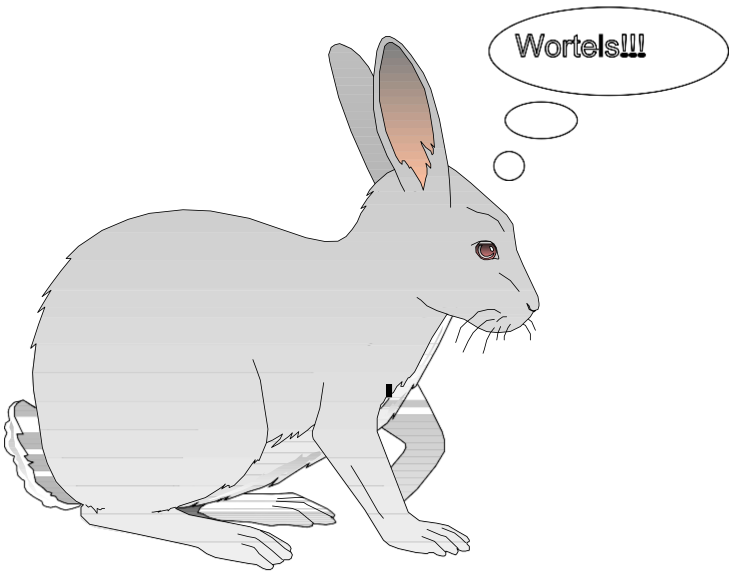
We kijken naar $\sqrt[3]{8}$. In tegenstelling tot voorgaande wortel staat er plots een 3 bij het wortelteken.

$\sqrt[3]{8}$ betekent dat we een getal zoeken als we dat drie maal met zichzelf vermenigvuldigen, dan komt er 8 uit; het resultaat van de berekening is 2.

Zo betekent $\sqrt[4]{625}$ dat we een getal zoeken dat als we dat vier maal met zichzelf vermenigvuldigen, dan komt er 625 uit. Het eindresultaat hiervan is 5.

Eigenlijk is het zo dat bij $\sqrt{4}$ ook een getal bij het wortelteken geplaatst moet worden. Zo is $\sqrt{4} = \sqrt[2]{4}$

Figuur 2



Omdat deze zogenaamde tweedemachtswortel zo veel voorkomt, laat men meestal de 2 bij de wortel weg. Maar officieel moet hij er gewoon bij gezet worden.

Voorbeeld 3

Wat komt uit de volgende wortels?
$\sqrt[3]{-8}$ en $\sqrt[4]{-16}$
Uit de eerste wortel komt –2, omdat –2.-2.-2 gelijk is aan –8. Maar bij de tweede wortel vinden we geen antwoord. Immers zouden we denken dat het antwoord 2 is, dan volgt uit 2.2.2.2 = 16 dat dit niet correct is. En vullen we –2 in, dan zien we dat –2.-2.-2.-2 ook 16 en niet –16 oplevert. Dit leidt tot de volgende

Regel 7

- Een onevenmachtswortel over een negatief getal levert een negatief getal op
- Een evenmachtswortel over een negatief getal kan niet.

In de volgende regel geven we de relatie aan tussen machten en wortels:

Regel 8

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

In woorden: de n-de machts wortel van een getal kan herschreven worden als dit getal tot de macht 1/n.

Voorbeeld 4

Herschrijven van de volgende wortels levert op

$$\sqrt[5]{10} = 10^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[6]{12} = 10^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$$

Naast deze twee regels zijn er nog twee andere regels voor wortels die we vermelden.

Regel 9

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$$

In woorden: als we onder een wortelteken twee factoren hebben staan, dan mogen we de wortel opsplitsen over beide factoren.

Voorbeeld 4

Om de regel te controleren kijken we naar $\sqrt{36}$. Hiervan weten we dat er 6 uit komt. We kunnen $\sqrt{36}$ herschrijven naar

$$\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2.3 = 6$$

We zien dat het opsplitsen van de wortel over beide factoren 4 en 9 inderdaad ook leidt tot het antwoord 6.
Toepassen op de uitdrukking

$$\sqrt{x^3 y^4}$$

met x en y positief kunnen we zien dat deze uitdrukking gelijk is aan

$$\sqrt{x^3 y^4} = \sqrt{x^2 .y^4 .x} = \sqrt{x^2 .y^4}.\sqrt{x} = xy^2.\sqrt{x}$$

Het nut van de regel zit hem dus in het kunnen vereenvoudigen van wortels.

Regel 10

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

In woorden: de wortel van een breuk is gelijk aan de breuk van een wortel.

Voorbeeld 5

Als we willen weten hoeveel $\sqrt{\frac{9}{16}}$ is, dan kunnen we deze wortel herschrijven:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Ook deze regel wordt voornamelijk gebruikt om uitdrukking te vereenvoudigen.

8.5 Contante waarde en Slotwaarde

In deze paragraaf kijken we naar de begrippen contante waarde en slotwaarde. Aan de hand hiervan zullen we zien hoe we uitgaande van jaarrente kunnen uitrekenen hoe groot de maandrente is.

Voorbeeld 1

Aan het begin van het jaar zetten we 100 euro op de bank. De jaarrente die hierbij gegeven wordt, bedraagt 5%. We noteren het bedrag dat we op de bank zetten met X en de jaarrente met i. Dat betekent dat

$X = 100$ en
$i = 5\%$.

Hoeveel geld staat er na 1 jaar op de spaarrekening? Dat is snel uit te rekenen, immers we nemen 5% van 100 euro ofwel 5 euro aan rente. Het totaalbedrag wordt 105 euro. Iets wiskundiger is de berekening:

$100 + 5\%.100 = 100 + 0{,}05.100 = 1.100 + 0{,}05.100 = 100.(1 + 0{,}05) = 100.1{,}05$
We zien dat we 100 dienen te vermenigvuldigen met een factor 1,05!

Hoeveel geld staat er na 2 jaar? Uitgaande van 105 euro moeten we hier 5% van nemen, hetgeen 5,25 euro oplevert aan rente. Optellen van 105 en 5,25 levert 110,25 euro op na 2 jaar. Als we deze berekening in 1 regel opschrijven, dan zien we:

$105 + 5\%.105 = 105 + 0{,}05.105 = 1.105 + 0{,}05.105 = 105.(1 + 0{,}05) = 105.1{,}05 = 100.1{,}05.1{,}05 = 100.1{,}05^2$.

Het laatste resultaat luidt in woorden: als we willen uitrekenen hoe groot 100 euro na 2 jaar geworden is met 5% rente, dan moeten we 2 maal vermenigvuldigen met 1,05.

Het blijkt dus dat we iedere keer als we willen uitrekenen hoeveel geld we hebben een jaar later, dan moeten we met 1,05 vermenigvuldigen. Dit leidt tot de volgende regel:

Regel 11

De SLOTWAARDE van een bedrag X na n jaren met een jaarrente i is:

$$X.(1+i)^n$$

Hierin noemen we i het groeipercentage en 1+ i de groeifactor.

Voorbeeld 2

Als we 100 euro op de bank hebben staan tegen een jaarrente van 5%, dan kunnen we ons de vraag stellen hoeveel geld er een jaar geleden stond. Omdat we dat op dit moment nog niet weten, noemen we dit bedrag X. We weten dat we dit bedrag met 1,05 dienen te vermenigvuldigen om een jaar later de rente er bij op te telllen. Maar dan hebben we 100 euro. Dit leidt tot:

X.1,05 = 100

In woorden: we dienen het onbekend bedrag X te vermenigvuldigen met 1,05 om op 100 euro uit te komen. Oplossen van de lineaire vergelijking doen we door te delen door 1,05. We vinden dan:

$$X = 100/1{,}05 = 95{,}24 \text{ euro}$$

Stel dat we willen weten hoeveel geld er 2 jaar geleden stond. We noemen dit onbekend bedrag voor het gemak weer X. Dit bedrag moet 2 maal met 1,05 vermenigvuldigd worden om 100 euro te krijgen. We zien dat:

$$X.\ 1{,}05^2 = 100$$

Voor het oplossen van deze vergelijking delen we door $1{,}05^2$ en we vinden:

$$X = 100/1{,}05^2 = 90{,}70 \text{ euro}$$

Ook hier zien we een wetmatigheid ontstaan die we weergeven in

Regel 12

De CONTANTE WAARDE van een bedrag X gerekend over n jaar geleden met een jaarrente

i is: $$\frac{X}{(1+i)^n}$$

Voorbeeld 3

We zetten 100 euro op de bank tegen een jaarrente van 6%. Hoe groot is de maandrente die men dan in theorie ontvangt?

Een eerste foute analyse zou zijn om 6% te delen door 12 en te zeggen dat de maandrente 0,5% bedraagt. Daarbij wordt de rente lineair verdeeld over de maanden en vergeet men dat er rente op rente verkregen wordt. De feitelijke maandrente is een fractie lager. Maar goed, hoe vinden we deze maandrente?

We hebben gezien dat als we een groeipercentage kennen, we ook weten met welke groeifactor we moeten vermenigvuldigen. Zo hebben we hier een jaarrente van 6%, zodat de groeifactor voor het bedrag van 100 euro 1,06 bedraagt. Vermenigvuldiging van beide leidt tot 100.1,06 = 106 euro een jaar later.

Bij dit voorbeeld is echter het groeipercentage per maand onbekend, dus ook de groeifactor per maand. We noemen deze onbekende groeifactor x. We weten dat we uitgaande van de 100 euro inleg maar liefst 12 maal met deze groeifactor dienen te vermenigvuldigen om uit te komen op 106 euro. Dit leidt tot de volgende vergelijking:

$$100.x^{12} = 106$$

Oplossen hiervan geschiedt in eerste instantie door te delen door 100:

$$x^{12} = 106/100 = 1{,}06$$

In woorden: of we nu 12 maal vermenigvuldigen met de groeifactor per maand of dat we 1 maal vermenigvuldigen met de groeifactor per jaar, dat levert hetzelfde effect op!

Deze vergelijking lossen we op door gebruik te maken van wortels. Immers, een andere wijze om naar de vergelijking te kijken is: we zoeken een getal x dat als we deze 12 maal met zichzelf vermenigvuldigen, dan komt er 1,06 uit. Maar dit is precies de definitie van een 12-de machts wortel! Dus vinden we:

$$x = \sqrt[12]{1{,}06} = 1{,}0049$$

De maandelijkse groeifactor is 1 + het maandelijkse groeipercentage. Hieruit volgt dat het maandelijkse groeipercentage gelijk is aan 0,0049 = 0,49%.

Dit leidt tot

Regel 13

Uitgaande van een jaarrente i vinden we de maandrente als volgt:

$$\sqrt[12]{1+i} - 1$$

8.8 Samenvatting

Machten en Wortels

Regel	
1	$x^n = x.x...x$, waarbij x n maal genoemd
2	$x^n.x^m = x^{n+m}$
3	$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
4	$(x^n)^m = x^{n.m}$
5	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
6	$x^0 = 1$
7	De onevenmachtswortel over een negatief getal levert een negatief getal op, de evenmachtswortel over een negatief getal kan niet.
8	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
9	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$
10	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Financiële Rekenkunde

Eenmalige storting

Regel	**Begrip**	**Formule**
11	Slotwaarde	$X.(1+i)^n$
12	Contante Waarde	$\frac{X}{(1+i)^n}$
13	Maandrente	$\sqrt[12]{1+i}-1$

Periodieke Betalingen/Stortingen

Begrip	**X begin van iedere periode**	**X einde van iedere periode**
Som Slotwaarden	$X.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}$**, regel 15**	$X.\frac{(1+i)^n-1}{i}$**, regel 14**
Som Contante Waarden	$X.(1+i).\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$**, regel 17**	$X.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$**, regel 16**

8.9 Basisopgaven

Opgave 1

Vereenvoudig:

a. $p^2.p^4.p^3$
b. $x^5.x^{10}.x^7.x^3$
c. $a^{-5}.a^{20}.a^{-15}$
d. $x^{-2}.x^{-3}.x^6$

Opgave 2

Vereenvoudig:

a. $(x^2)^3.x^4$
b. $(a^4)^2.(a^3)^7$
c. $(z^3)^{-4}.z^{-5}.z^{25}$
d. $p^8.(p^{-1})^8.(p^2)^6$

Opgave 3

Schrijf uit zonder negatieve exponent:

x^{-7}

$(b^{\frac{1}{3}})^{-6}$

$(r^{-9})^{-\frac{1}{3}}$

$(z^{-\frac{1}{3}})^{12}$

Opgave 4

Vereenvoudig en schrijf uit zonder gebroken exponent:

$x^4.(x^{-1})^2.x^{\frac{1}{2}}$

$(z^{-\frac{1}{4}})^8.(z^3)^4.z^{\frac{1}{3}}$

$b^7.(b^{\frac{1}{2}})^{-10}.(b^{\frac{1}{2}})^9$

$(s^{-3})^{-\frac{1}{3}}.s^{\frac{3}{2}}$

Opgave 5

Bereken met je rekenmachine in vier decimalen:

$\sqrt[9]{10}$

$\sqrt[30]{1,5}$

$\sqrt[12]{1,08}$

$\sqrt[4]{1,05}$

Opgave 6

Vereenvoudig en schrijf zonder gebroken en negatieve exponent:

$$\frac{x^3.(x^{-2})^5.x^{14}}{x^5.x^2}$$

$$x^4.(x^{-3})^{-3}.(x^{\frac{1}{2}})^5$$

$$(x^{-\frac{1}{4}})^5.(x^4)^2.(x^7)^{-1}$$

a. $\dfrac{x^{-1}.x^{-9}.x^{-3}}{x^{-4}.x^{-2}}$

8.10 Toegepaste Opgaven

Opgave 1

a. We storten 2.500 euro aan het begin van het jaar op een spaarrekening. Drie jaar later storten we 3.500 euro op dezelfde rekening. 15 jaar na de eerste storting halen we het totale bedrag van de rekening op. Hoeveel geld halen we op als je weet dat de bank 4,5% jaarrente geeft?

b. Jim stort 7.000 euro op de bank. Hij haalt 20 jaar na deze storting het geld van de bank en ontvangt 12.000 euro. Hoe groot is de jaarlijkse rente?

c. Doortje heeft 1.000 euro gestort op de bank. Drie jaar later heeft dit bedrag zich ontwikkeld tot 1.400 euro. Hoe groot is de jaarlijkse rente? Hoe groot is de maandelijkse rente?

Opgave 2

a. Frits koopt een auto op afbetaling. Hij betaalt hiervoor direct 5.000 euro, over een jaar 4.000 euro en nog een jaar later 10.000 euro tegen een jaarrente van 9%. Hoe groot is de contante waarde van de betalingen op het moment van aanschaf van de auto?

b. Een echtpaar koopt een vakantiewoning in Spanje.

Figuur 8

Zij lenen hiertoe geld, waarbij ze de keuze hebben tussen twee leenvarianten van een bepaalde geldschieter:

Variant A: nu 20.000 euro betalen en over 2 jaar 25.000 euro
Variant B: nu 15.000 euro betalen, over een jaar 15.000 euro en over 2 jaar 14.500 euro.

Bij welke rente is variant A slimmer en bij welke rente variant B?

Opgave 3

a. Evelien leent 30.000 euro tegen een jaarrente van 6%. Zij stort de periodieke betaling jaarlijks 20 jaar lang, aan het begin van een jaar. Hoe groot is het bedrag dat Evelien ieder jaar stort?

b. Alex leent 100.000 euro tegen een rente van 5,4%. Hij betaalt 30 jaar lang jaarlijks een bedrag, aan het einde van ieder jaar. Hoe groot is de periodieke betaling?

Opgave 4

a. Alice doet mee met een spaarplan. Gedurende 15 jaar stort zij aan het begin van ieder jaar 1.500 euro. Het verwachte rendement is 6,4%. Hoe groot is het verwachte eindbedrag?

b. Steven stort 20 jaar lang 4.000 euro aan het einde van het jaar in een spaarplan. Er wordt iedere keer 5% administratiekosten afgehaald van de periodieke storting. Het te verwachten rendement is 8%. Hoe groot is het te verwachten eindbedrag?

Uitwerkingen hoofdstuk 8 Basisopgaven

Opgave 1

$p^2 . p^4 . p^3 = p^{2+4+3} = p^9$

$x^5 . x^{10} . x^7 . x^3 = x^{5+10+7+3} = x^{25}$

$a^{-5} . a^{20} . a^{-15} = a^{-5+20-15} = a^0 = 1$

$x^{-2} . x^{-3} . x^6 = x^{-2-3+6} = x^1 = x$

Opgave 2

$(x^2)^3 . x^4 = x^6 . x^4 = x^{6+4} = x^{10}$

$(a^4)^2 . (a^3)^7 = a^8 . a^{21} = a^{8+21} = a^{29}$

$(z^3)^{-4} . z^{-5} . z^{25} = z^{-12} . z^{-5} . z^{25} = z^{-12-5+25} = z^8$

$p^8 . (p^{-1})^8 . (p^2)^6 = p^8 . p^{-8} . p^{12} = p^{8-8+12} = p^{12}$

Opgave 3

$x^{-7} = \frac{1}{x^7}$

$(b^{\frac{1}{3}})^{-6} = b^{-2} = \frac{1}{b^2}$, immers 1/3 maal –6 is –2!

$(r^{-9})^{-\frac{1}{3}} = r^3$, immers –9 maal –1/3 is 3!

$(z^{-\frac{1}{3}})^{12} = z^{-4} = \frac{1}{z^4}$

Opgave 4

$$x^4.(x^{-1})^2.x^{\frac{1}{2}} = x^4.x^{-2}.x^{\frac{1}{2}} = x^{4-2}.x^{\frac{1}{2}} = x^2.\sqrt{x}$$

$$(z^{-\frac{1}{4}})^8.(z^3)^4.z^{\frac{1}{3}} = z^{-2}.z^{12}.z^{\frac{1}{3}} = z^{-2+12}.z^{\frac{1}{3}} = z^{10}.\sqrt[3]{z}$$

$$b^7.(b^{\frac{1}{2}})^{-10}.(b^{\frac{1}{2}})^9 = b^7.b^{-5}.b^{4\frac{1}{2}} = b^{7-5+4\frac{1}{2}} = b^{6\frac{1}{2}} = b^6.b^{\frac{1}{2}} = b^6.\sqrt{b}$$

$$(s^{-3})^{-\frac{1}{3}}.s^{\frac{3}{2}} = s^1.s^{\frac{3}{2}} = s^{2\frac{1}{2}} = s^2.s^{\frac{1}{2}} = s^2.\sqrt{s}$$

Opgave 5

In 4 decimalen nauwkeurig:

$\sqrt[9]{10} = 1{,}2915$
$\sqrt[30]{1{,}5} = 1{,}0136$

$\sqrt[12]{1{,}08} = 1{,}0064$
$\sqrt[4]{1{,}05} = 1{,}0123$

Opgave 6

$$\frac{x^3.(x^{-2})^5.x^{14}}{x^5.x^2} = \frac{x^3.x^{-10}.x^{14}}{x^5.x^2} = \frac{x^{3-10+14}}{x^{5+2}} = \frac{x^7}{x^7} = 1$$

$$x^4.(x^{-3})^{-3}.(x^{\frac{1}{2}})^5 = x^4.x^9.x^{2\frac{1}{2}} = x^{15\frac{1}{2}} = x^{15}.x^{\frac{1}{2}} = x^{15}.\sqrt{x}$$

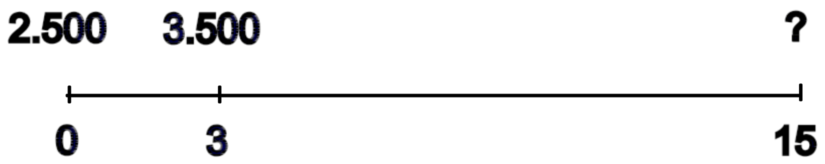
$$(x^{-\frac{1}{4}})^5.(x^4)^2.(x^7)^{-1} = x^{-\frac{5}{4}}.x^8.x^{-7} = x^{-\frac{5}{4}+8-7} = x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\frac{x^{-1}.x^{-9}.x^{-3}}{x^{-4}.x^{-2}} = \frac{x^{-1-9-3}}{x^{-4-2}} = \frac{x^{-13}}{x^{-6}} = x^{-13+6} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$$

Uitwerkingen hoofdstuk 8 Toegepaste opgaven

Opgave 1

a. Figuur 9



$2.500 * 1{,}045^{15} + 3.500 * 1{,}045^{12} = 10.773{,}79$ euro.

b. $7.000 * (1+i)^{20} = 12.000$, delen door 7.000 geeft
$(1+i)^{20} = 12.000 / 7.000$. Dit lossen we op door de 20ste machts wortel te nemen:
$(1+i) = \sqrt[20]{12.000 / 7.000} = 1{,}0273$. Maar dat betekent dat
i = 0,0273 = 2,73%.

1. Allereerst bepalen we de jaarrente:
$1.000 * (1+i)^3 = 1.400$, we delen door 1.000:
$(1+i)^3 = 1{,}4$, deze lossen we op door de 3e machts wortel te nemen:
$1 + i = \sqrt[3]{1{,}4} = 1{,}1187$. We vinden i = 0,1187 = 11,87%.
2.Vervolgens bepalen we de maandrente. Hiervoor hebben we regel 13:
$\sqrt[12]{1{,}1187} - 1 = 1{,}0094 - 1 = 0{,}0094 = 0{,}94\%$.

Opgave 2

5.000 + 4.000/1,09 + 10.000/1,09² = 17.086,52 euro.

Vervalt.

Opgave 3

Periodiek lenen en betalen aan het begin van een periode: Regel 17.

Eindbedrag = 30.000 euro
n = 20
i = 6% invullen geeft:

$30.000 = X.1{,}06.\frac{1 - 1{,}06^{-20}}{0{,}06}$ ofwel 30.000 = X.12,15816. Delen door 12,15816 levert op:
X = 2.467,49 euro dient er iedere periode betaald te worden.

Lenen en periodiek terugbetalen aan het einde van een jaar: Regel 16.

Lenen 100.000 euro
n = 30 jaar
i = 5,4% invullen geeft:

$100.000 = X.\dfrac{1-1{,}054^{-30}}{0{,}054}$, ofwel 100.000 = X.14,69566. Delen door 14,69566 geeft:
X = 6.804,73 euro jaarlijks betalen.

Opgave 4

Periodiek sparen en storten aan het begin van een jaar: Regel 15.

X = 1.500 euro
n = 15 jaar
i = 6,4% invullen geeft:

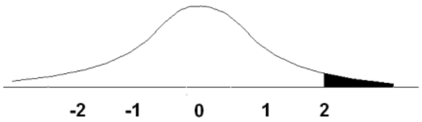
$1.500.1{,}064.\dfrac{1{,}064^{15}-1}{0{,}064} = 38.300{,}38$ euro.

Periodiek sparen en storten aan het einde van een jaar: Regel 14.

De daadwerkelijke storting X = 0,95 * 4.000 = 3.800 euro
n = 20 jaar
i = 8,0% invullen geeft:

$3.800.\dfrac{1{,}080^{20}-1}{0{,}080} = 173.895{,}46$ euro. Toch een leuk bedrag!

Bijlage 1 Tabel Standaard Normale verdeling



Voorbeeld: P(z > 2,00) = 0,0228.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	,0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007

Bijlage 2 FORMULEBLAD WISKUNDE/STATISTIEK INSTAPTOETS

Hoofdstuk 1

Formulesopbasisvanlossegegevens:

populatiegemiddelde $\mu = \dfrac{\sum x_i}{N}$

steekproefgemiddelde $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$

populatiestandaarddeviatie $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$

steekproefstandaarddeviatie $s = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Formulesopbasisvaneenfrequentietabel:

populatiegemiddelde $\mu = \dfrac{\sum f_i . m_i}{N}$

steekproefgemiddelde $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i . m_i}{n}$

populatiestandaarddeviatie $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (m_i - \mu)^2}{N}}$

steekproefstandaarddeviatie $s = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Hoofdstuk 3

Transformatie naar standaard normale verdeling: $\underline{z} = \dfrac{\underline{x} - \mu}{\sigma}$

Standaardfout: $\sigma/\sqrt{n}$

Hoofdstuk 7

Regel 1
De algemene gedaante van een lineair verband luidt $y = ax + b$

Regel 2
De definitie van de richtingscoëfficiënt is $a = \Delta y/\Delta x$

Hoofdstuk 8

Regel	
1	$x^n = x.x...x$ **, waarbij *x* n maal genoemd**
2	$x^n.x^m = x^{n+m}$
3	$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
4	$(x^n)^m = x^{n.m}$
5	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
6	$x^0 = 1$
7	**De onevenmachtswortel over een negatief getal levert een negatief getal op, de evenmachtswortel over een negatief getal kan niet.**
8	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
9	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$
10	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Eenmalige storting

Regel	Begrip	Formule
11	**Slotwaarde**	$X.(1+i)^n$
12	**Contante Waarde**	$\frac{X}{(1+i)^n}$
13	**Maandrente**	$\sqrt[12]{1+i}-1$

Periodieke Betalingen/Stortingen

Begrip	**X begin van iedere periode**	**X einde van iedere periode**
Som Slotwaarden	$X.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}$**, regel 15**	$X.\frac{(1+i)^n-1}{i}$**, regel 14**
Som Contante Waarden	$X.(1+i).\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$**, regel 17**	$X.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$**, regel 16**